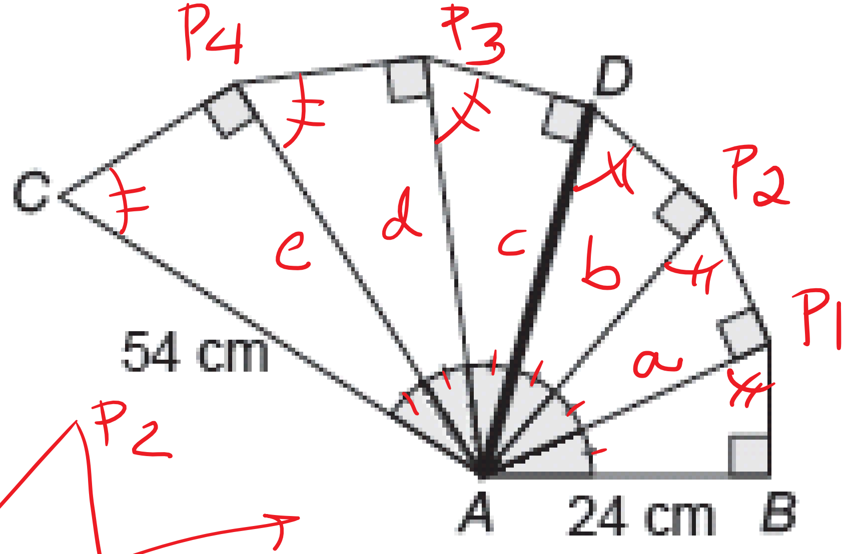
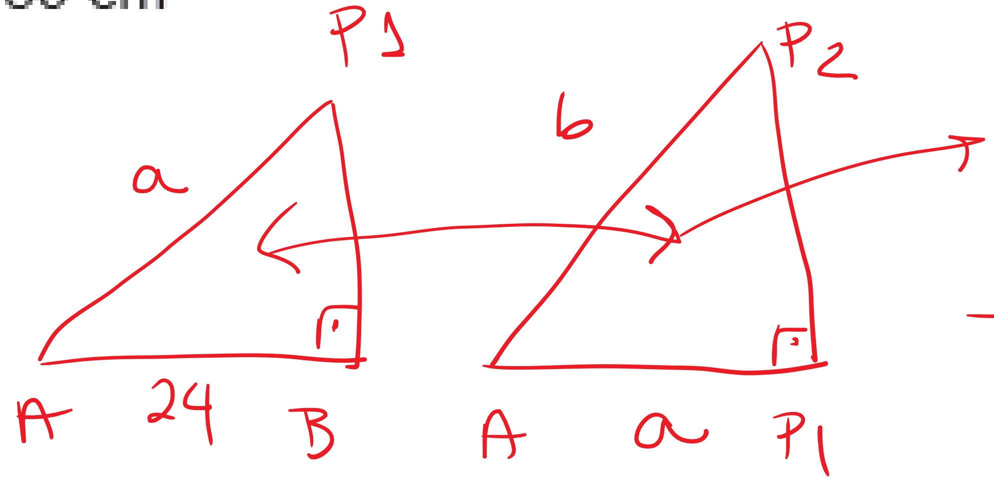
OBMEP 2011, N3

14. Os seis triângulos da figura são retângulos e seus ângulos com vértice no ponto A são iguais. Além disso, $AB = 24$ cm e $AC = 54$ cm. Qual é o comprimento de AD?

A) 30 cm
B) 34 cm
C) 36 cm
D) 38 cm
E) 39 cm





$$\frac{a}{b} = \frac{24}{a}$$

→ analisando as outras semelhanças

$$\frac{a}{b} = \frac{24}{a} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{54}$$

$bd = c^2$

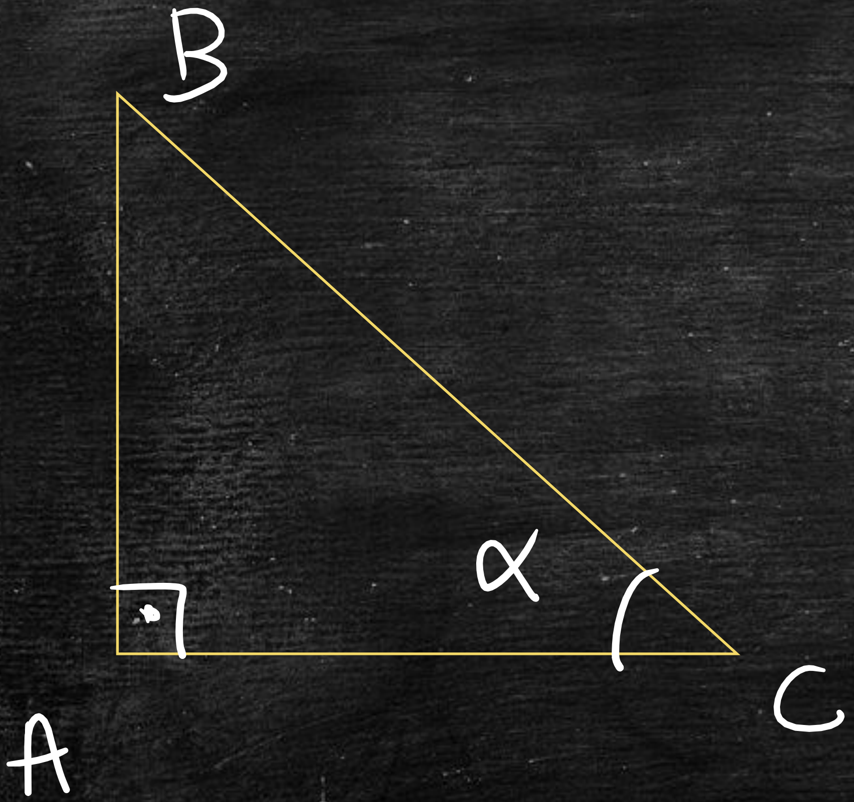
$24e = ad$

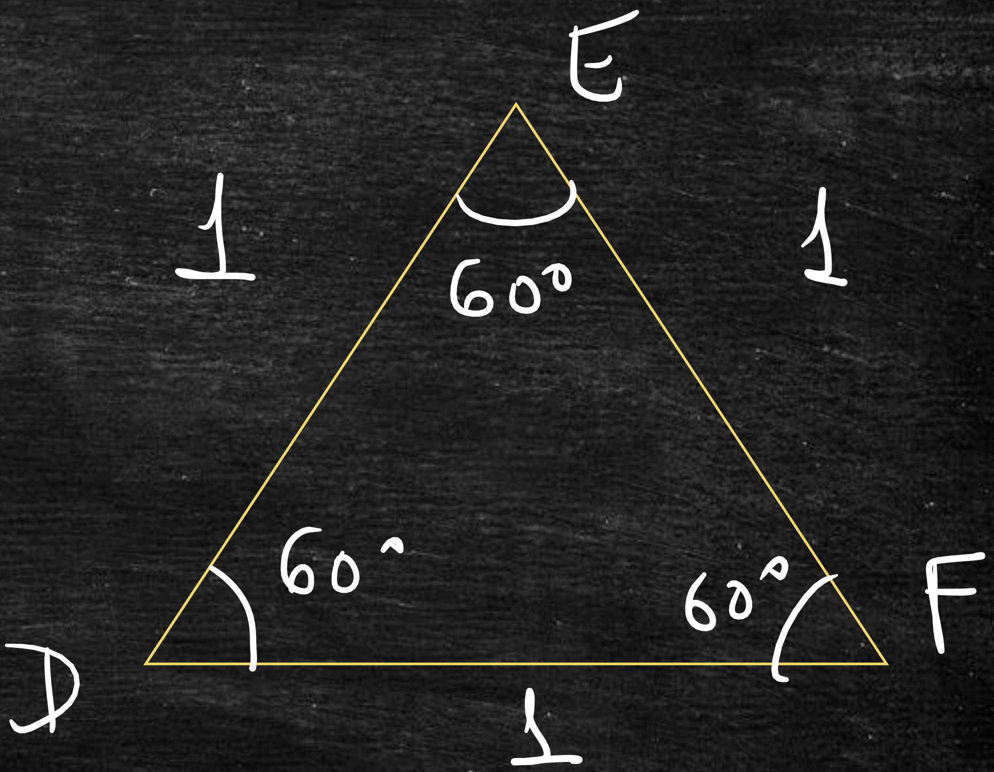
→ $54a = be$

$bd\,24\,e = c^2 \cdot ad \cdot$

$24\,\cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{d} \cdot 54 \cdot \cancel{e} = c^2 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{d} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{e} \cdot$

$c^2 = 24 \cdot 54 = 1296 \Rightarrow c = 36$





$$\cos \alpha = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$$\frac{1}{2} = \cos(60^\circ) = \frac{|DF|}{|EF|} = \frac{1}{1}$$

contradição

Uma premissa falsa pode implicar em uma premissa verdadeira.

$$p \Rightarrow q$$

objetos matemáticos que cumprem p cumprem q.

$A = \{$ objetos que cumprem $p \}$

$B = \{$ objetos que cumprem $q \}$

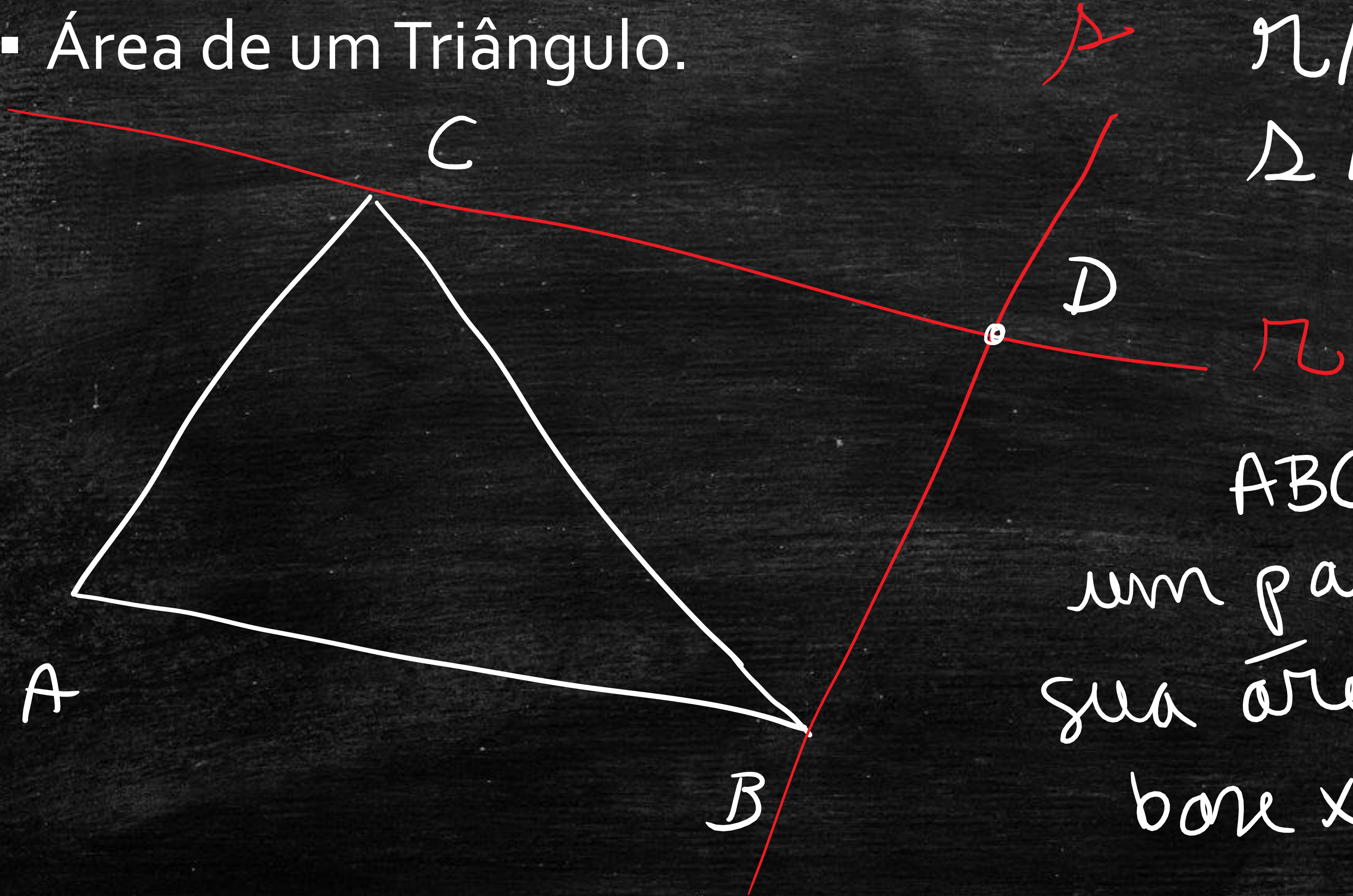
$$p \Rightarrow q \quad \Longleftrightarrow \quad A \subset B$$

mas, o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

Logo, uma premissa falsa gera um conjunto vazio, que está contido em qualquer conjunto.

Áreas

- Área de um Triângulo.



$r \parallel AB$

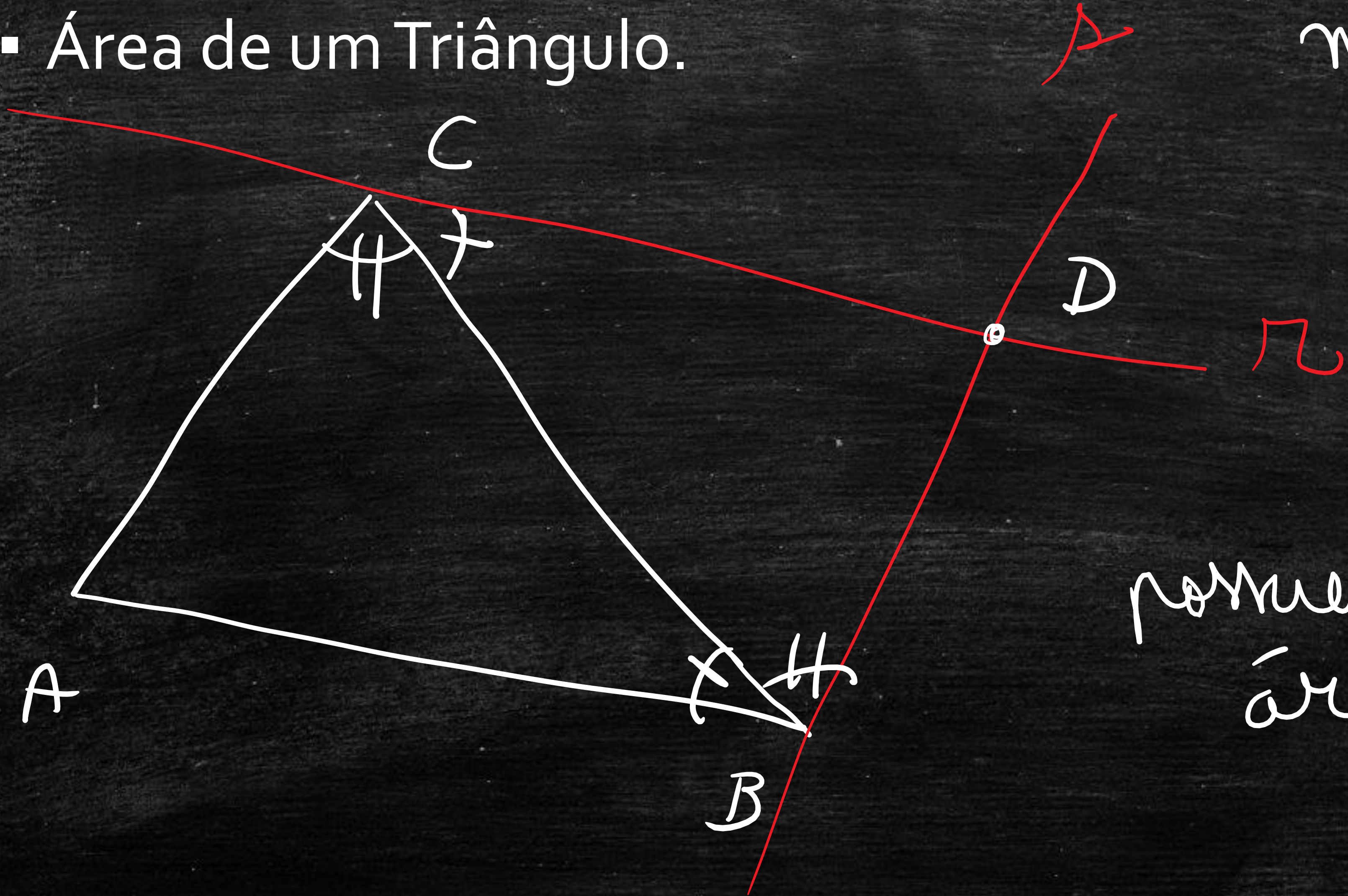
$s \parallel AC$

ABCD é um paralelogramo

sua área é base x altura

Áreas

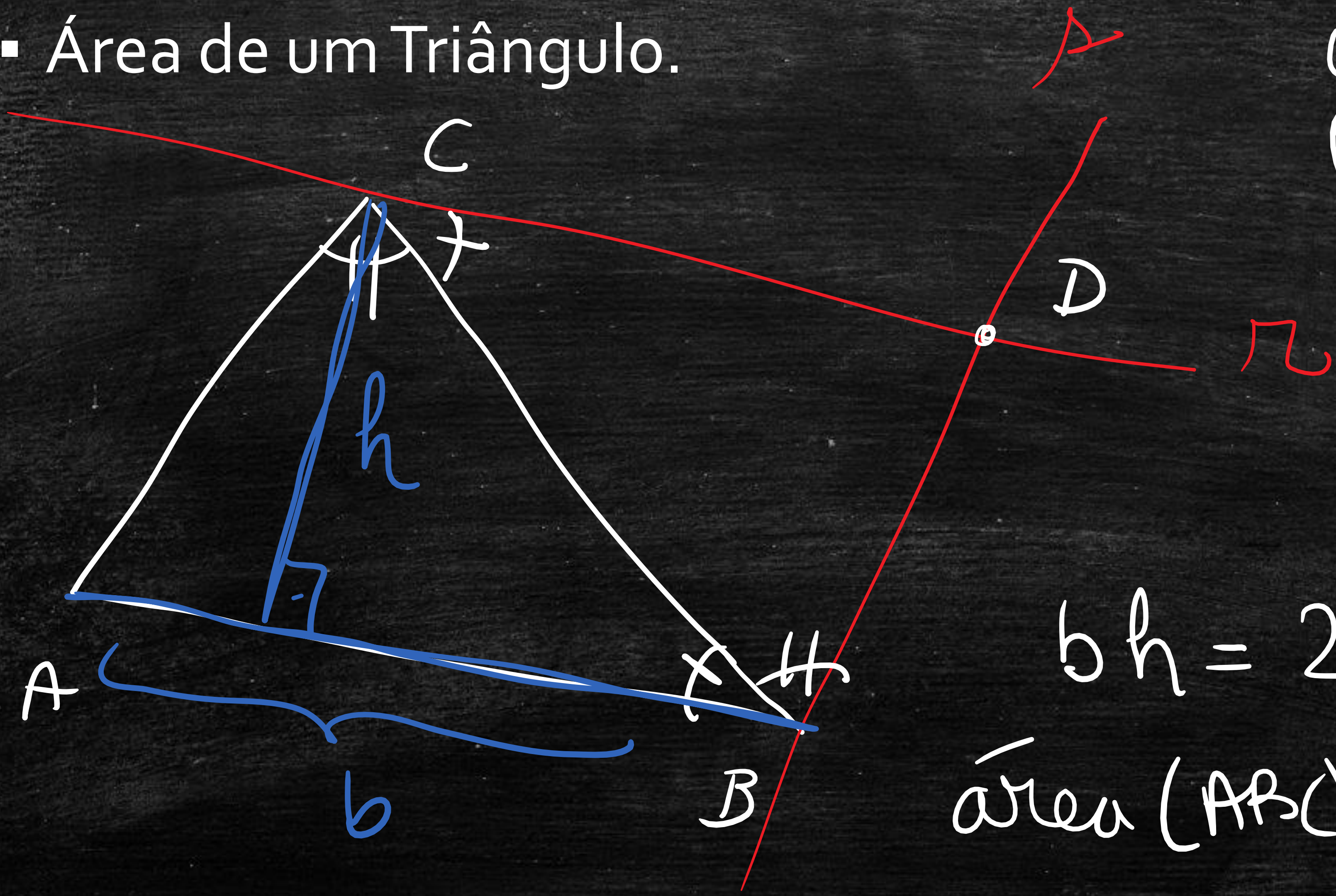
- Área de um Triângulo.



notemos agora que $ACB \equiv CBD$ por ALA, logo possuem mesma área

Áreas

- Área de um Triângulo.



área do paralelogramo

$\parallel$

2x área do triângulo

$\Downarrow$

$b\,h = 2\ \text{área}(ABC)$

$\text{área}(ABC) = \dfrac{b \cdot h}{2}.$

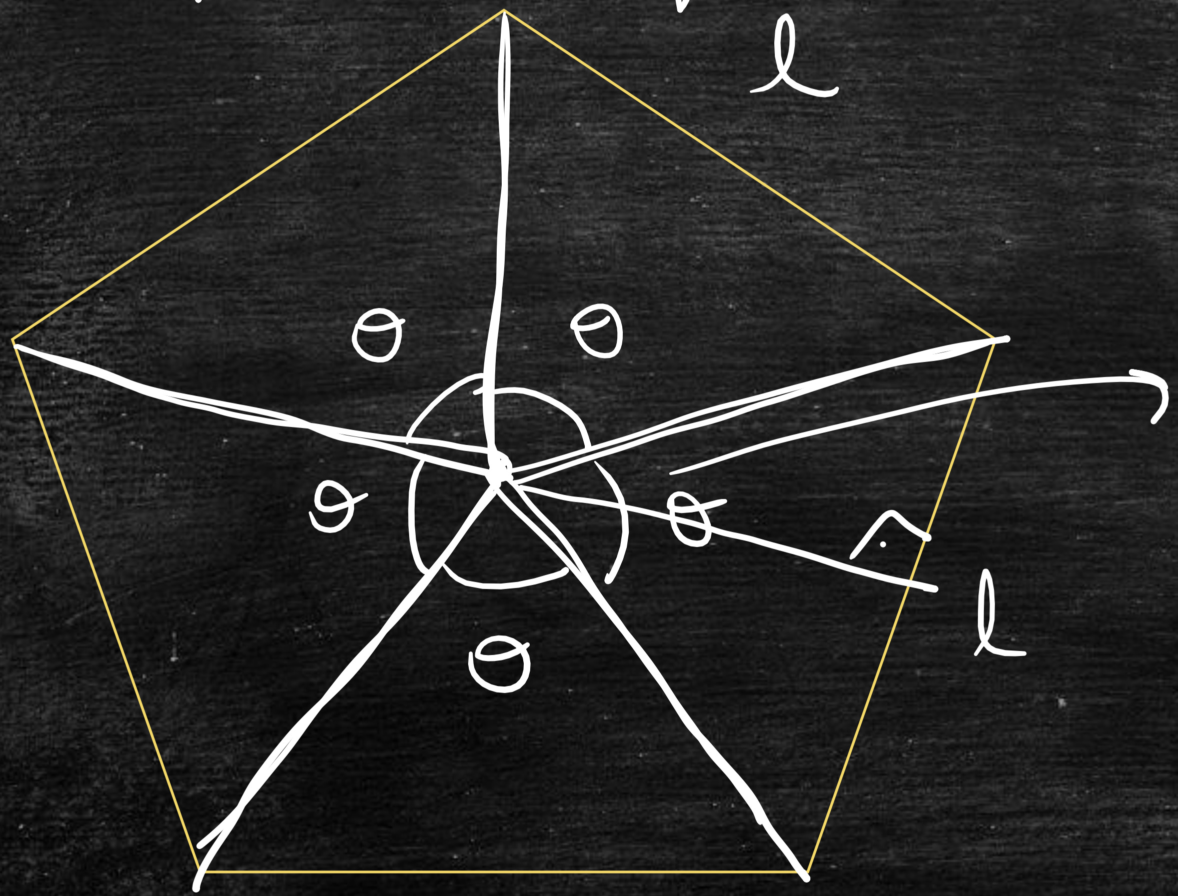
Áreas

- Área de um Trapézio.

Um quadrilátero é um trapézio quando ele possui um par de lados paralelos e outro par de lados não paralelos.

$$\text{área}(ABCD) = \frac{(|AD| + |BC|) \cdot |BP|}{2}$$

pentágono regular

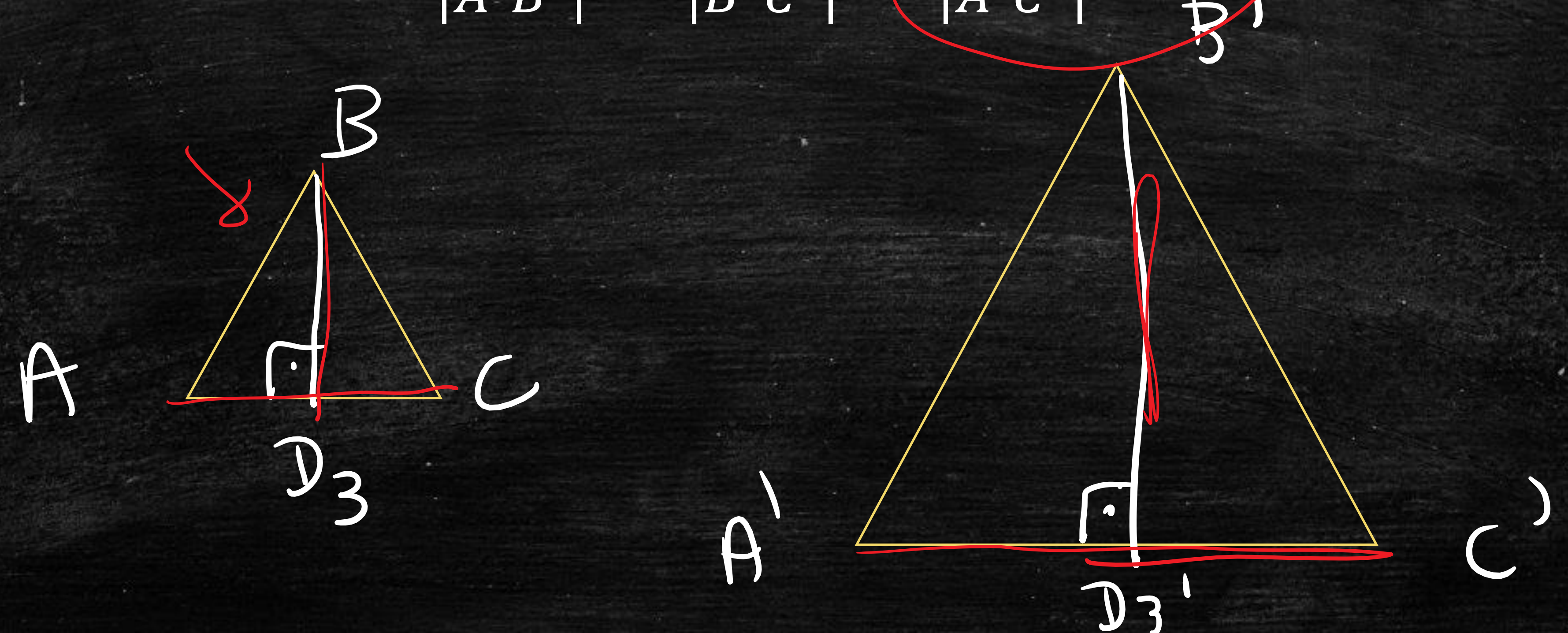


$$\theta = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\frac{\theta}{2} = 36^\circ$$

Áreas

- Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos semelhantes, com razão de semelhança k, ou seja,
  - $\dfrac{|AB|}{|A'B'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|} = \dfrac{|AC|}{|A'C'|} = k.$



Áreas

- Se área$(A'B'C') = x$ então área$(ABC) = k^2 x$.

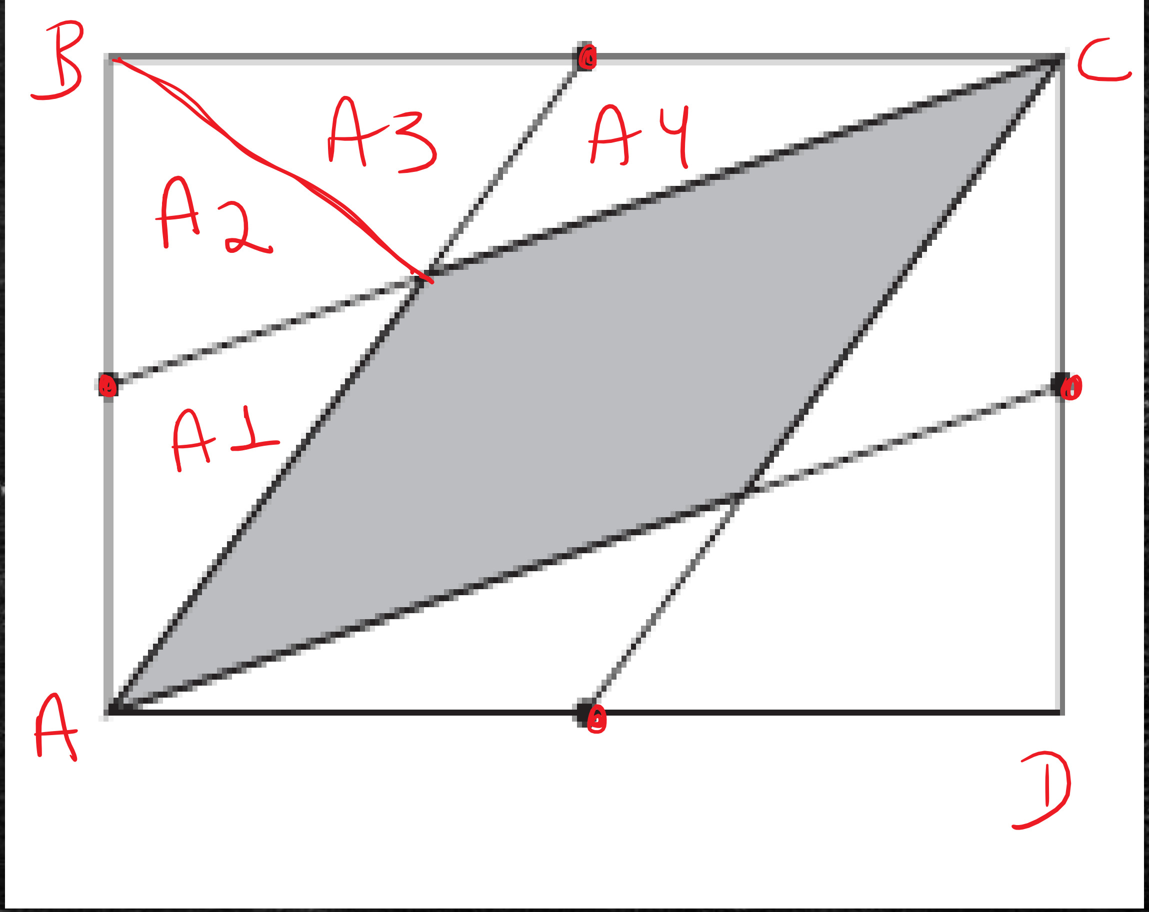
$|AB| = k|A'B'|$ e as respectivas alturas têm a mesma proporção, ou seja,
$|BD_3| = k|B'D_3'|$.

$$\text{área}(ABC) = \frac{|AC|\cdot|BD_3|}{2} = \frac{k\cdot|A'C'|\cdot k|B'D_3'|}{2}$$

$$= k^2 \cdot |A'C'|\cdot|B'D_3'|/2 = k^2\ \text{área}(A'B'C')$$

Exercícios

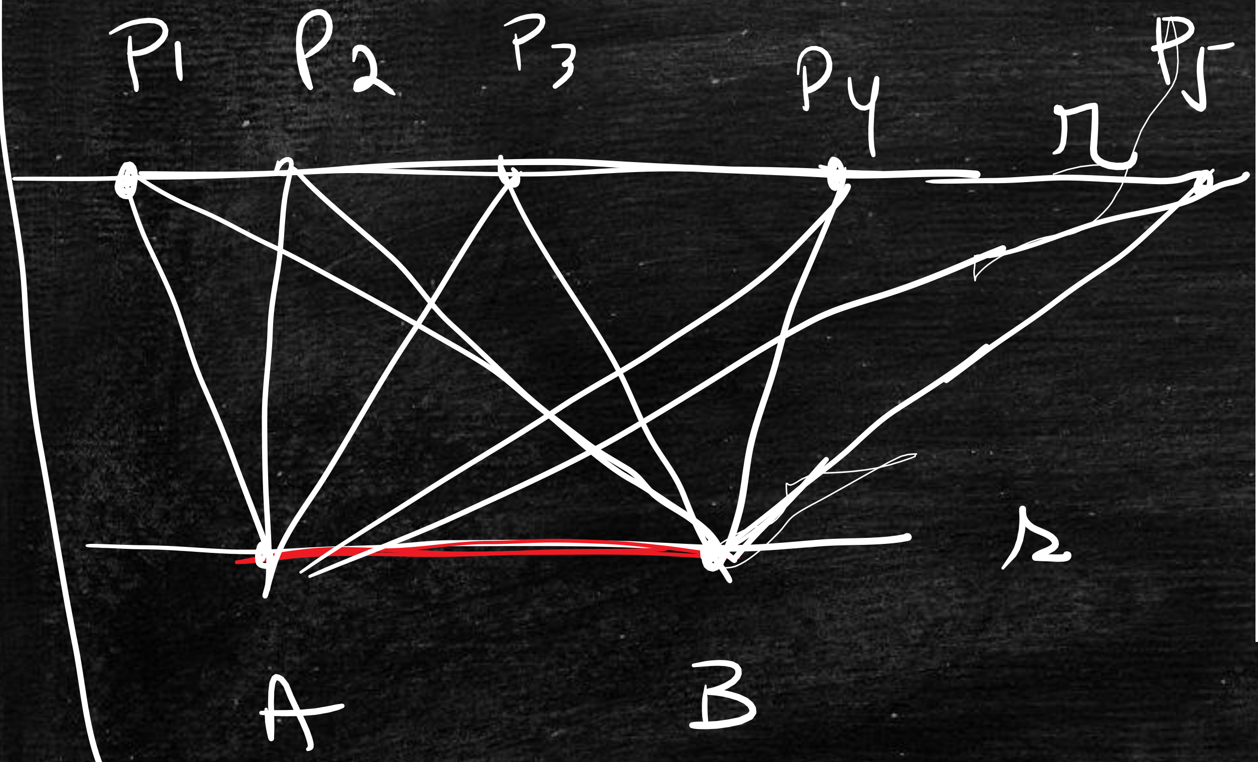
- Obmep, 2011, N3
- A figura a lado mostra um retângulo de área 42 u.a. com os pontos médios dos lados em destaque. Qual é a área, em u.a., da região cinza?

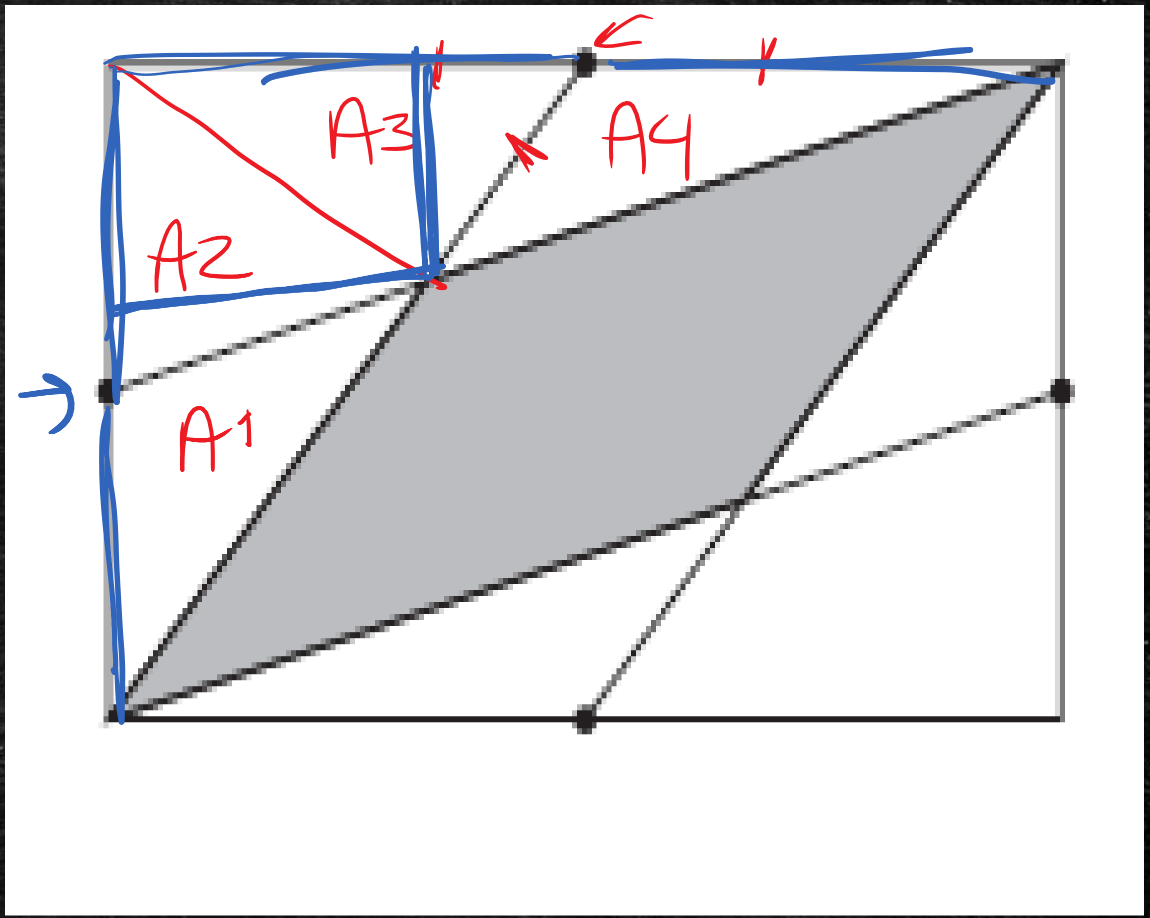


considere os quatro triângulos A_1, A_2, A_3 e A_4.

1) área (A_3) = área (A_4)

2) área (A_2) = área (A_1)





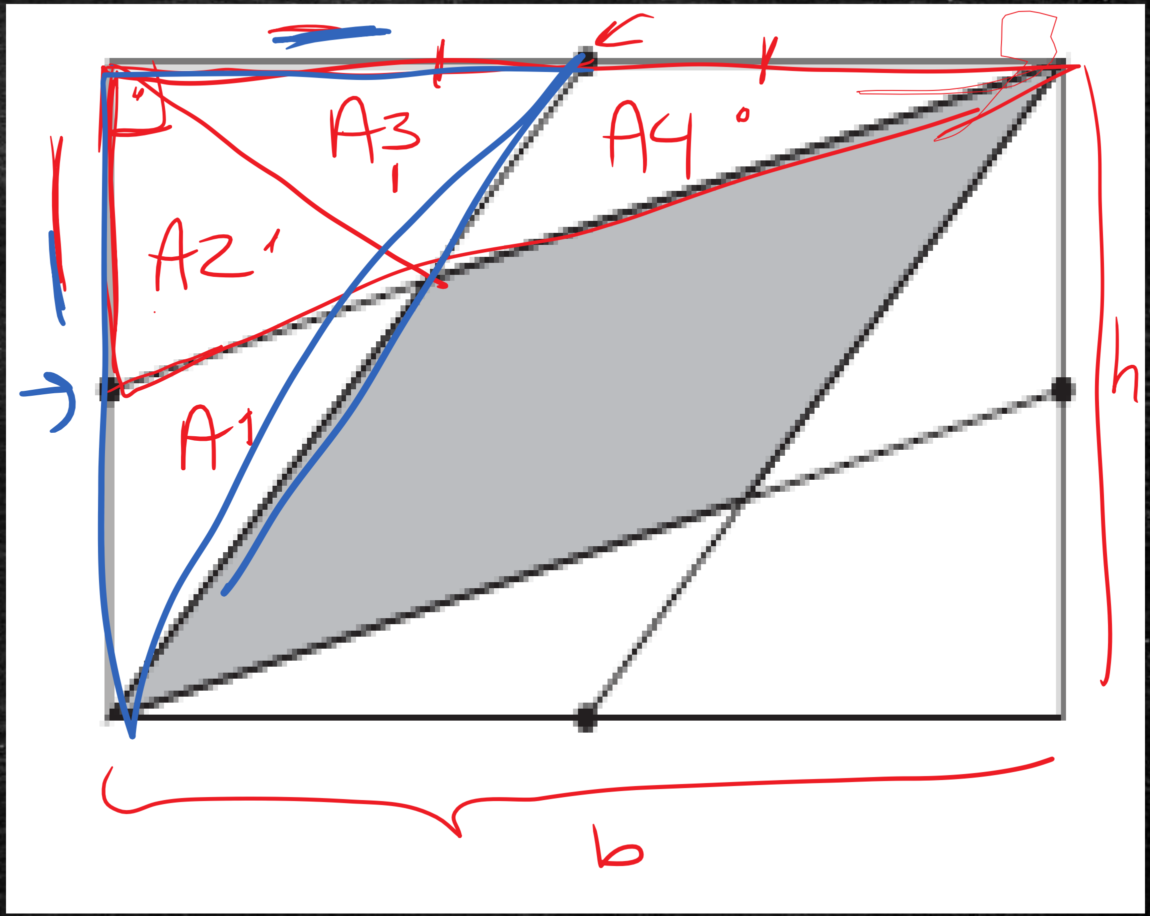
pois possuem mesma base e mesma altura.

$$\text{área}(A_2) + \text{área}(A_3) + \text{área}(A_4) = 42/4 \qquad bh = 42$$

$$= \frac{b}{2} \cdot h \cdot \frac{1}{2} = \frac{bh}{4}$$

pelo mesmo raciocínio:

$$a(A_1) + a(A_2) + a(A_3) = \frac{42}{4}$$



$$a(\cancel{A_2}) + a(\cancel{A_3}) + a(A_4) =$$

$$= a(A_1) + a(\cancel{A_2}) + a(\cancel{A_3})$$

$$\Longrightarrow \text{área}(A_1) = \text{área}(A_4)$$

$a(A_3) = a(A_4) = a(A_1)$ ←

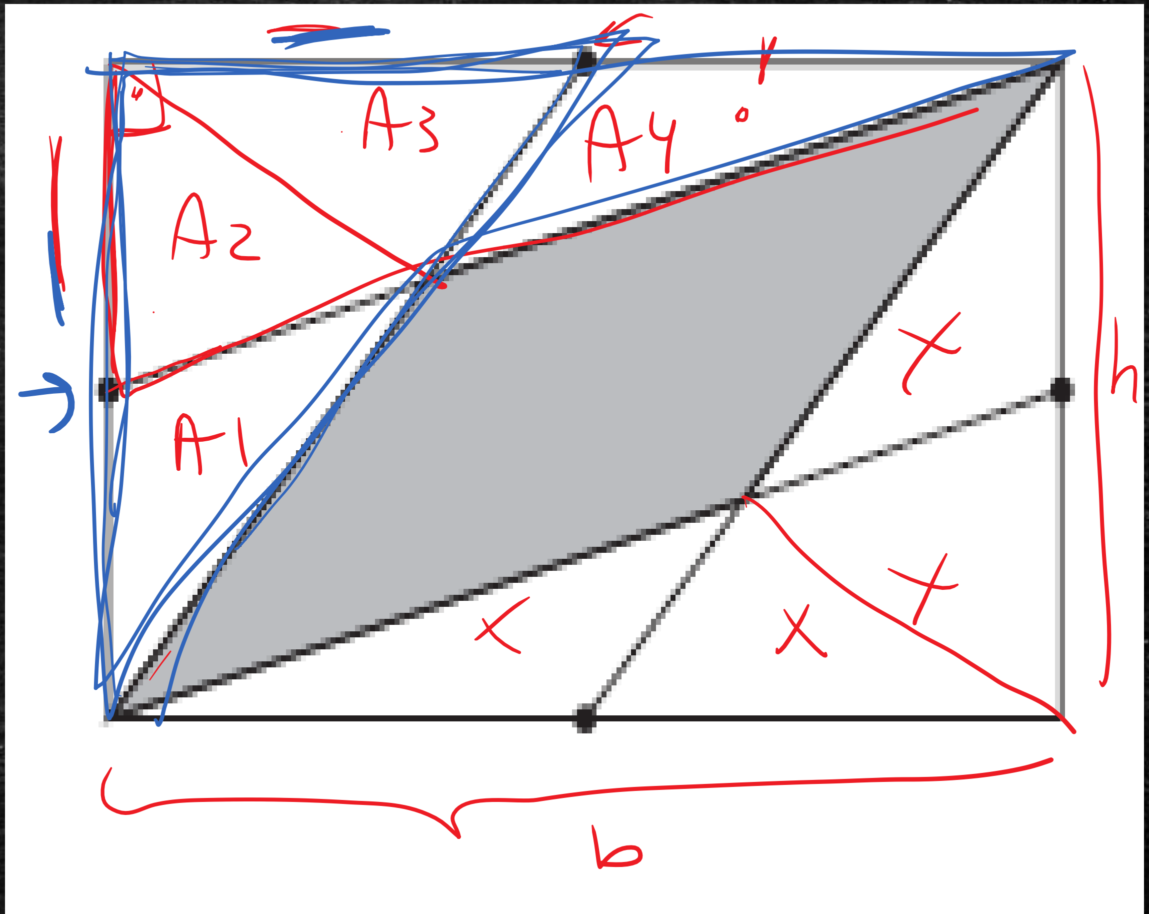
$a(A_2) = a(A_1) = a(A_4)$

$a(A_2) = a(A_3)$

∴ todos possuem mesma área.

$3 \text{ área }(A_1) = \frac{42}{4}$

$\text{área }(A_1) = \frac{42}{12}$



$\Rightarrow \text{área }(A_1) = \text{área }(A_4)$

a área da região cinza pode ser dada pela expressão:

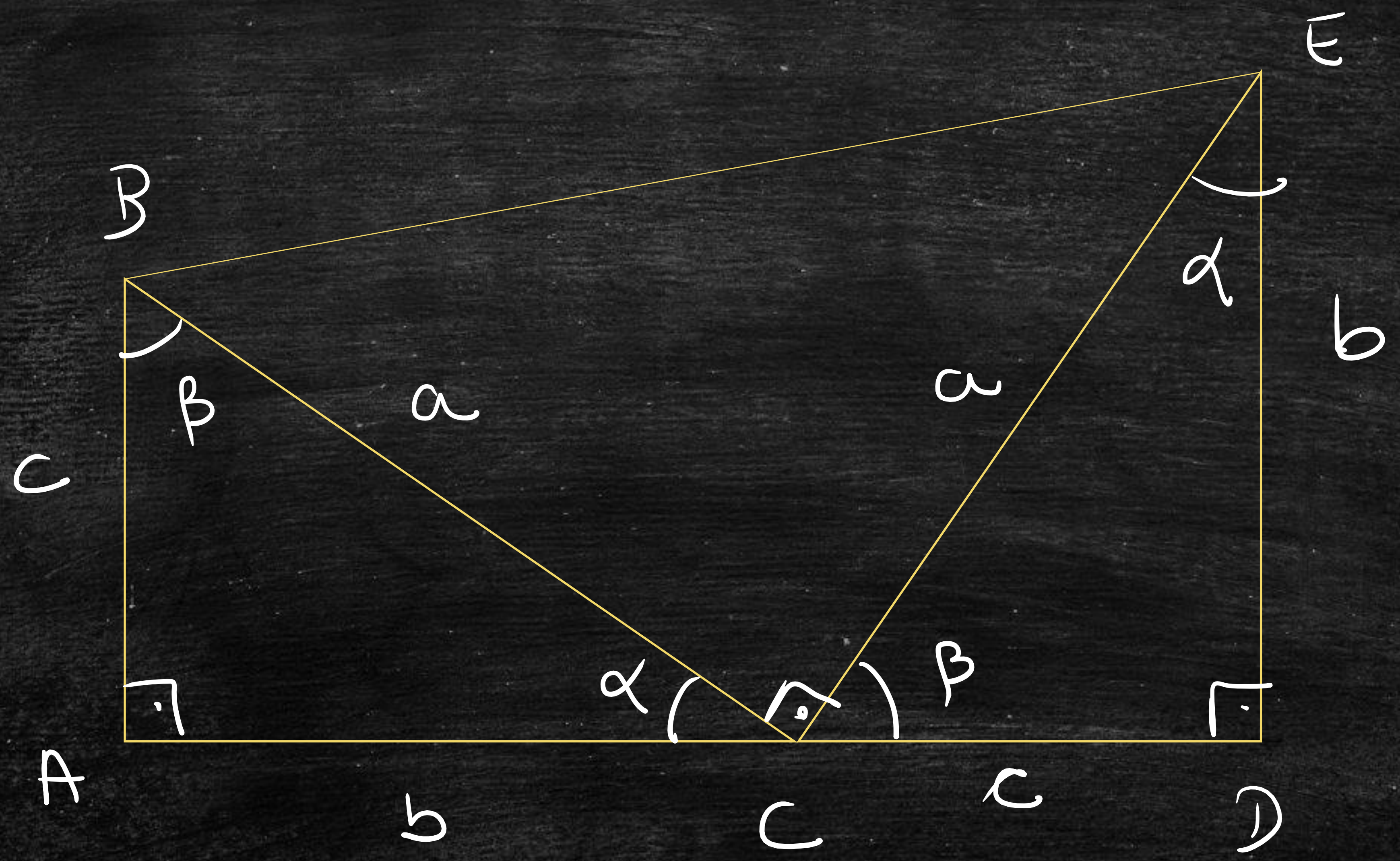
$$42 - \frac{8^{\div 4} \times 42}{12_{\div 4}} =$$

$$= 42 - \frac{2 \times 42}{3} = \frac{42}{3} = 14 \text{ u.a.}$$

Teorema de Pitágoras

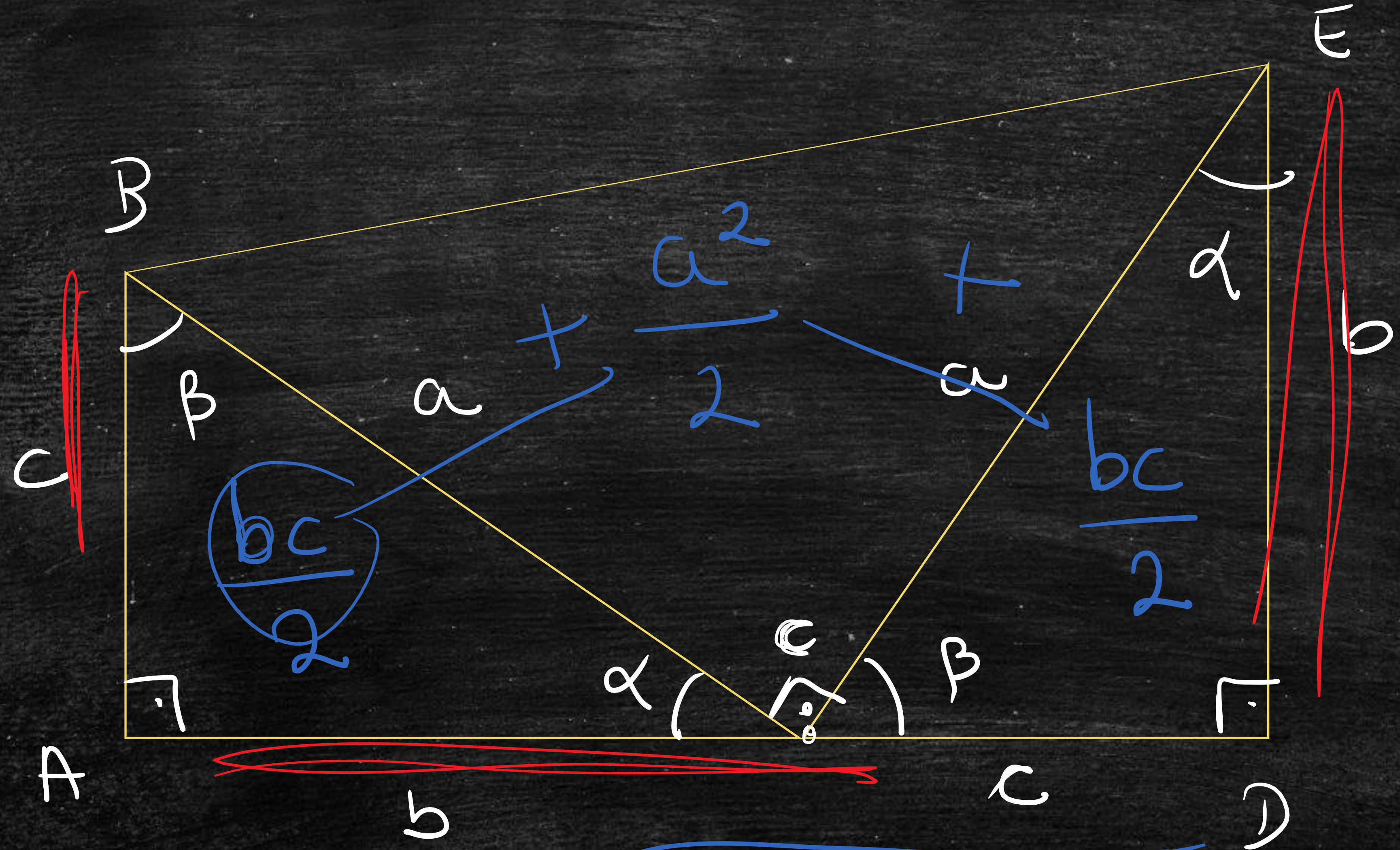
- **Demonstração do Presidente**

- Demonstração creditada ao presidente dos EUA James A. Garfield.
- James Abram Garfield foi um advogado, professor e político norte-americano que serviu como 20º Presidente dos Estados Unidos de março de 1881 até seu assassinato em setembro do mesmo ano. Garfield foi baleado por um assassino quatro meses após assumir a presidência e faleceu dois meses depois. (*Wikipédia*)



ABED é um trapézio

ACD – colineares e ABC ≡ CDE



$$\text{área do trapézio} = \frac{(b+c)(b+c)}{2}$$

Soma das áreas dos 3 triângulos

$$\frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} \quad (*)$$

área do trapézio

$$\frac{(b+c)(b+c)}{2} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} \quad (**)$$

$$(*) = (**) \qquad \frac{2bc}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{b^2 + c^2 + 2bc}{2}$$

$$\frac{2b\cancel{c}}{\cancel{2}} + \frac{a^2}{2} = \frac{b^2 + c^2 + 2b\cancel{c}}{\cancel{2}}$$

$$\frac{a^2}{\cancel{2}} = \frac{b^2 + c^2}{\cancel{2}}$$

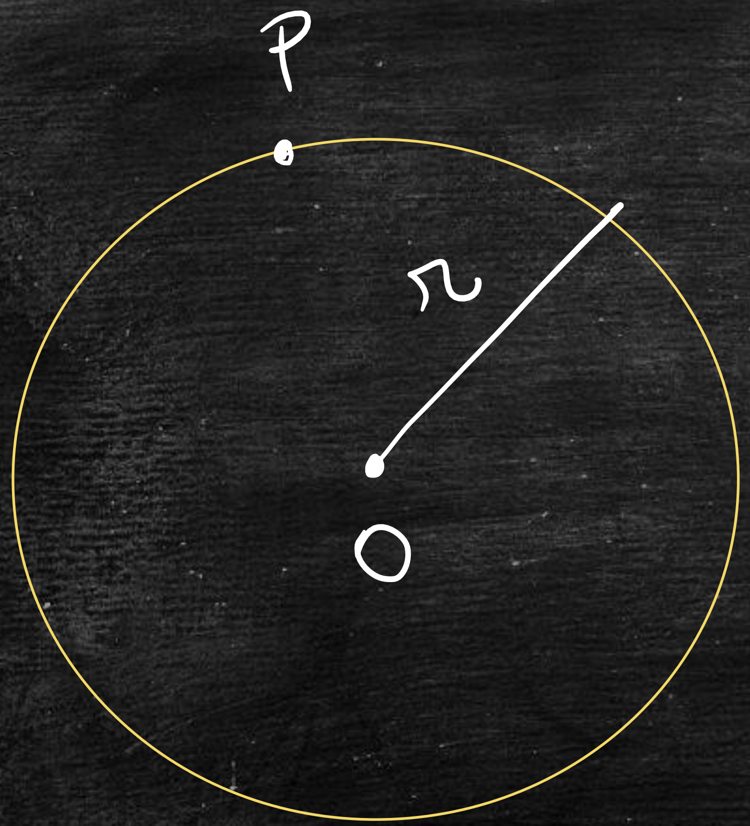
$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

$\divideontimes$

Áreas

- Área de uma circunferência de raio r.

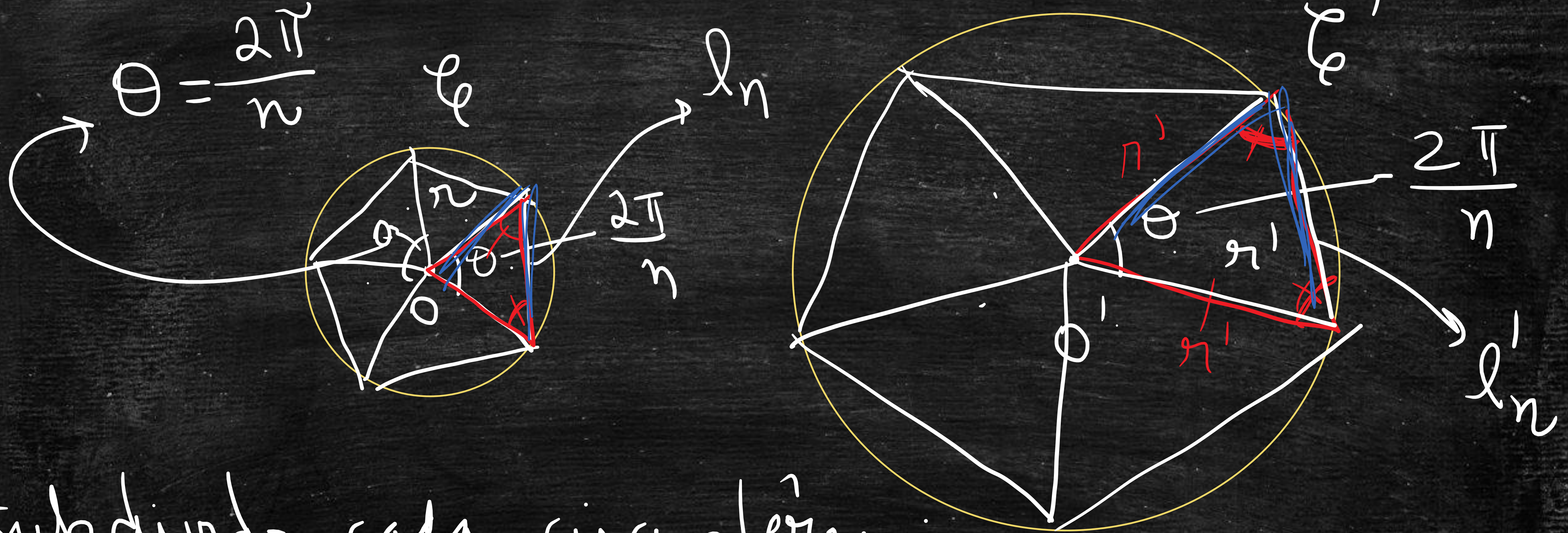
Dados um ponto O e um número $r > 0$, a circunferência de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos do plano que distam r de O.



$$d(P, O) = r$$

O objetivo é verificar que dadas duas circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ com raios r e r', respectivamente, os respectivos comprimentos c e c' de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ cumprem a condição

$$\frac{c}{2r} = \frac{c'}{2r'} \quad (= \pi)$$



subdividindo cada circunferência
em n triângulos congruentes, T_n e T_n'.
os triângulos T_n e T_n' são semelhantes
por AAA (todos ângulos corresp. de mesma medida)

$$\frac{l_n}{r} = \frac{l_n'}{r'} \Longrightarrow \frac{n\,l_n}{2r} = \frac{n\,l_n'}{2r'}$$

$$\frac{n\,l_n}{2r} = \frac{n\,l_n'}{2r'}$$

fazendo $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} n\,l_n = C$$

$$\lim_{n\to\infty} n\,l_n' = C'$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n\,l_n)}{2r} = \frac{\lim (n\,l_n')}{2r'} \Longrightarrow \frac{C}{2r} = \frac{C'}{2r'}.$$