MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2023

9a. lista de exercícios

1. Sejam $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Mostre que $f'(x,y)$ é inversível, $\forall (x,y) \in \Omega$, e que f não é injetora em Ω. Compare com o Teorema da Função Inversa.

2. Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ diferenciável na origem e suponha que $f'(0) = \lambda I$, onde $I \in L(\mathbb{R}^N)$ é a transformação identidade e $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que

$$|x| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(0)| \geq \lambda |x|/2.$$

3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $0 \in U$, e $f : U \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 tal que $f(0) = 0$ e 1 não é autovalor de $f'(0)$.

1. Mostre que existe um aberto $V \subset U$, $0 \in V$, tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in V$, $x \neq 0$;
2. Mostre que este resultado continua válido sem a hipótese de f ser de classe C^1: basta assumir f diferenciável.

Sugestão: no ítem (1) use o Teorema da Função Inversa. Para (2) estime $|x - f(x)| \geq \ldots$

4. Mostre que as equações

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 & = & 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 & = & 0 \end{cases}$$

determinam funções $u(x,y)$, $v(x,y)$ de classe C^1 em um aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo $(2,-1)$ satisfazendo $u(2,-1) = 2$, $v(2,-1) = 1$. Calcule as derivadas parciais de u e v no ponto $(2,-1)$.

5. Considere a equação

$$e^{2x-y} + \cos(x^2 + xy) - 2 - 2y = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

O conjunto das soluções desta equação próximo de $(0,0)$ define, implicitamente, uma das variáveis como função da outra? Se sim, determine a(s) derivada(s) desta(s) função(ões) na origem.

6. Sejam $T \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+M})$ injetora e $F \subset \mathbb{R}^{N+M}$ um subespaço vetorial tal que $\mathbb{R}^{N+M} = T(\mathbb{R}^N) \oplus F$. Mostre que $\dim F = M$ e que $T^\sharp : \mathbb{R}^N \oplus F \to \mathbb{R}^{N+M}$ definida por $T^\sharp(x,y) = Tx + y$ é linear e bijetora.

7. Demonstre o seguinte resultado, conhecido como a *forma local das imersões*:

Teorema. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^{N+M}$ de classe C^1. Seja $x_0 \in \Omega$ e suponha que $f'(x_0)$ seja injetora. Mostre que existem abertos $Z \subset \mathbb{R}^{N+M}$, $V \subset \Omega$ e $W \subset \mathbb{R}^M$ com

$f(x_0) \in Z$, $x_0 \in V$ e $0 \in W$, e uma bijeção $g : Z \to V \times W$ de classe C^1 e com inversa também de classe C^1 tais que $g(f(x_0)) = (x_0, 0)$ e $g(f(x)) = (x, 0)$ para $x \in W$.

Sugestão: Faça $T = f'(x_0)$, tome F como no exercício 21, defina $\Phi : U \times F \to \mathbb{R}^{N+M}$ por $\Phi(x, y) = f(x) + y$ e aplique o Teorema da Função Inversa.

- - - - - o o o - - - - -