Semelhança de Triângulos

Dizemos que dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são **semelhantes** quando existe uma correspondência biunívoca entre vértices

$$A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'$$

de modo que as medidas dos ângulos em vértices correspondentes sejam iguais, e razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma.

Escrevemos $ABC \sim A'B'C'$.

Semelhança de Triângulos

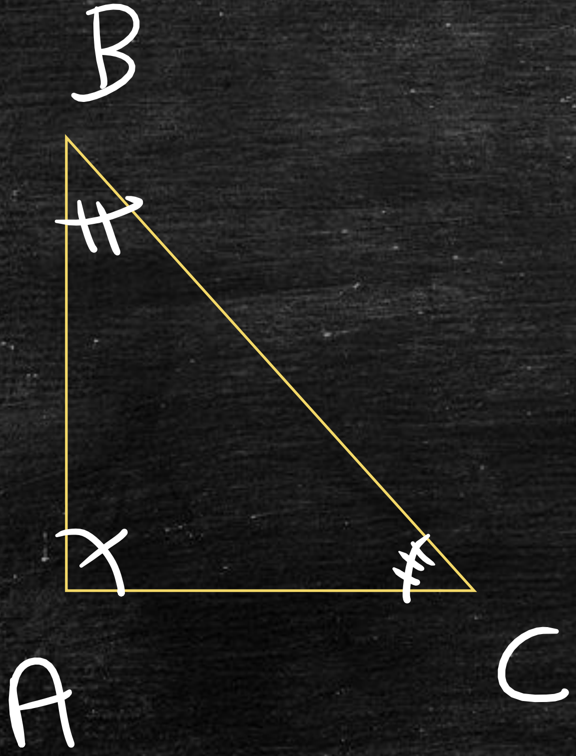
Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices:

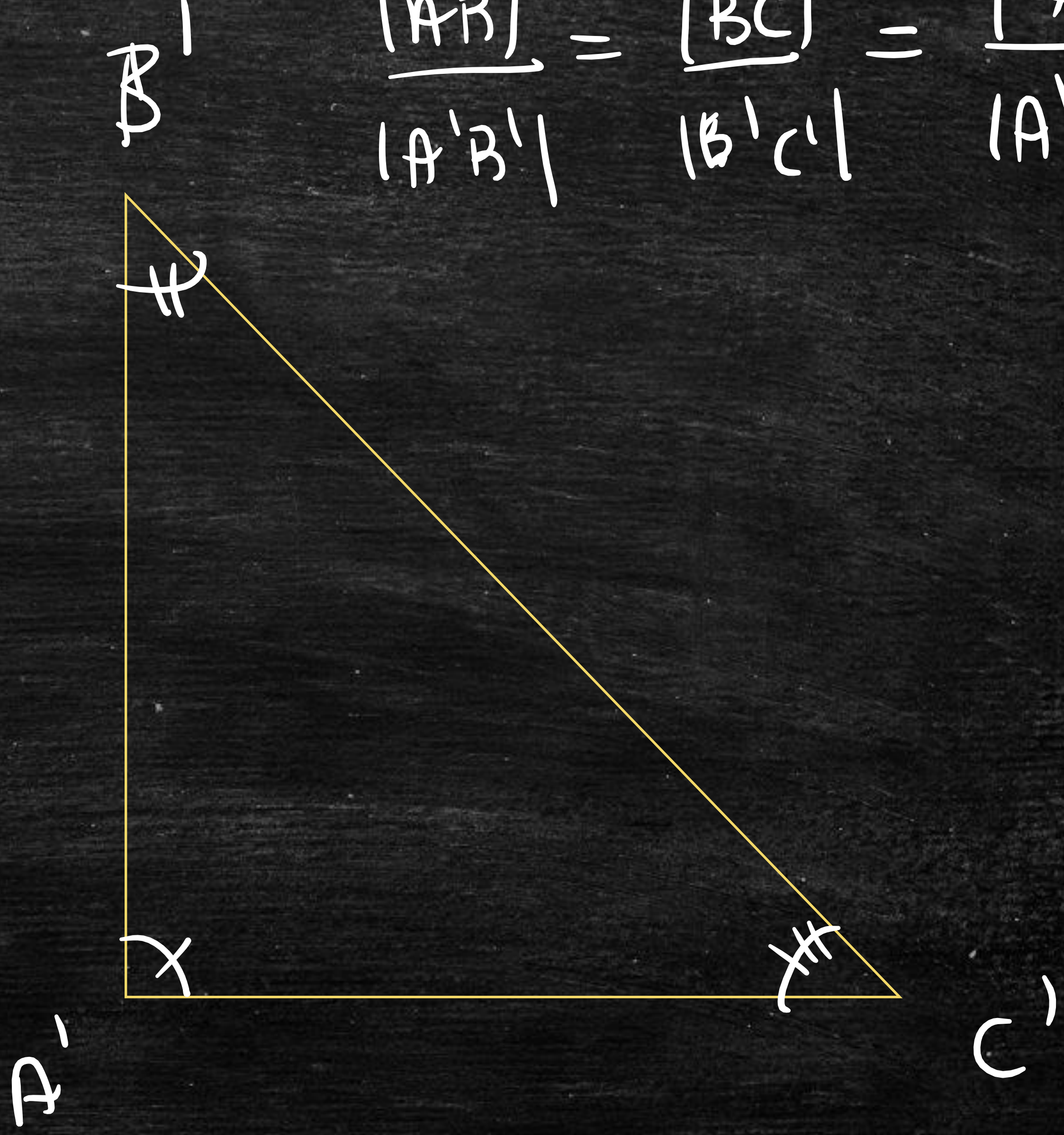
$$\rightarrow \quad A \leftrightarrow A', \mathrm{B} \leftrightarrow B', \mathrm{C} \leftrightarrow C'$$

- Assim $m(\hat{A}) = m(\widehat{A'})$, $m(\hat{B}) = m(\widehat{B'})$ e $m(\hat{C}) = m(\widehat{C'})$.
- E existe $k > 0$ tal que

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = k$$

k é a **razão de semelhança** entre os triângulos ABC e $A'B'C'$.





$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = k > 0$$

Dados dois triângulos ABC e A'B'C', as seguintes condições são equivalentes.

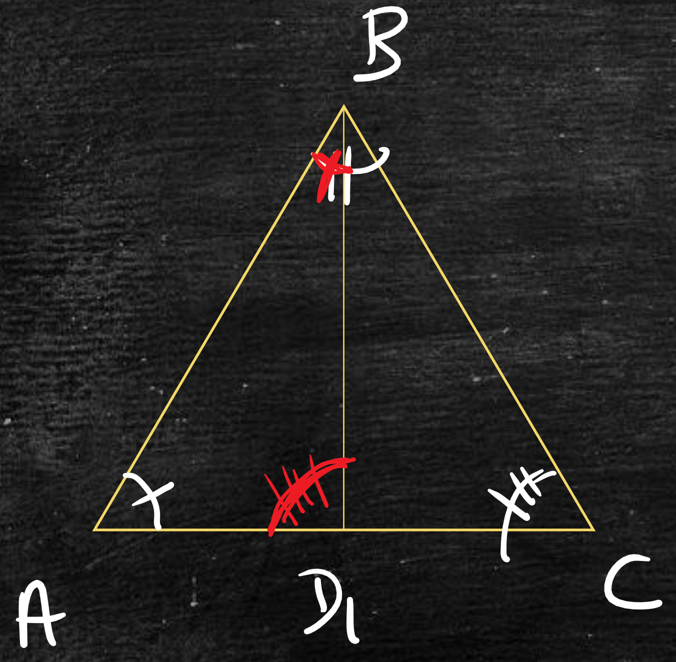
(a) $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C})$

(b) $\dfrac{|AB|}{|A'B'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|} = \dfrac{|AC|}{|A'C'|} = k$.

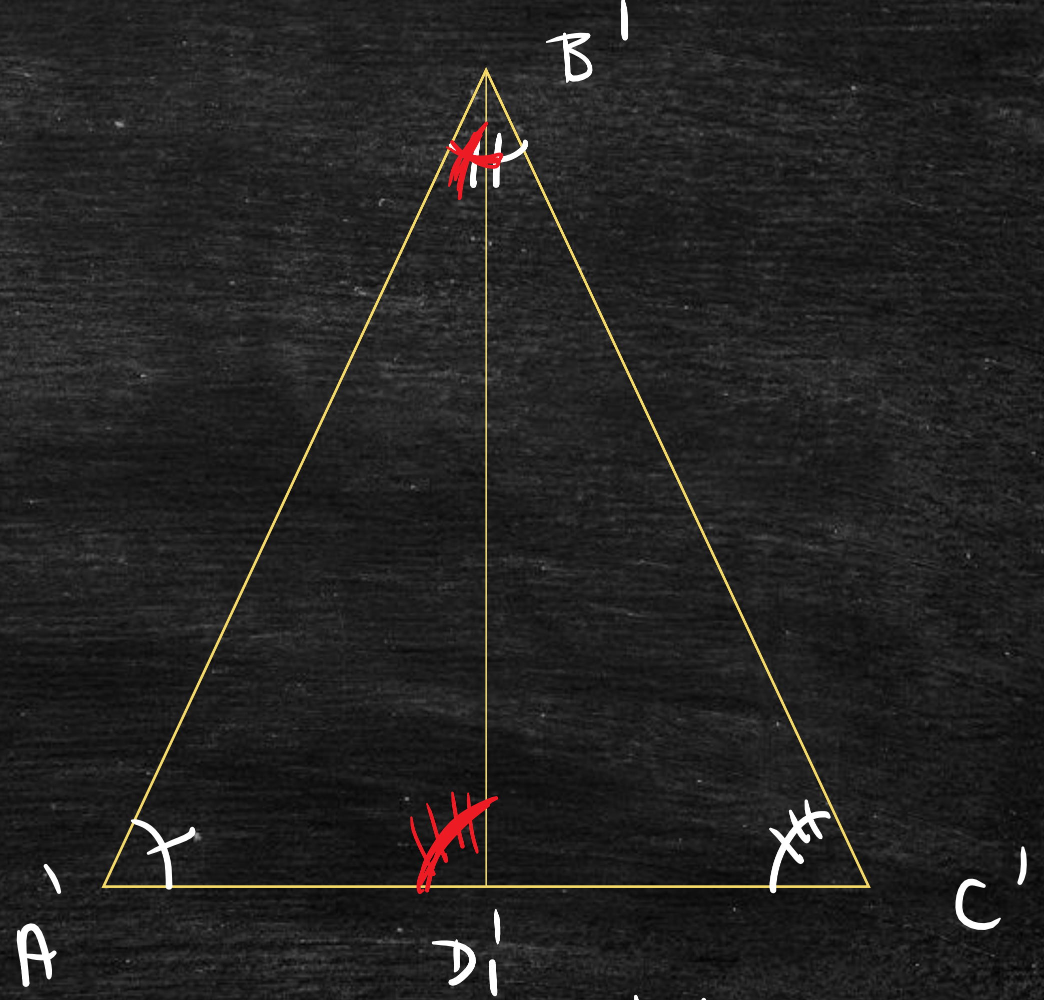
Pode-se demonstrar usando Teo. de Tales e sua recíproca.

Aplicações e Exercícios

- Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos semelhantes, com razão de semelhança k.
- Sejam, ainda, $b_A, b_{A'}, m_A$ e $m_{A'}$, e h_A e $h_{A'}$ respectivamente os comprimentos das bissetrizes, medianas e alturas relativas a A e A'.
- Então $\frac{m_A}{m_{A'}} = \frac{h_A}{h_{A'}} = \frac{b_A}{b_{A'}} = k$



BD_1 : bissetriz ABC



BD_1' : bissetriz $A'B'C'$

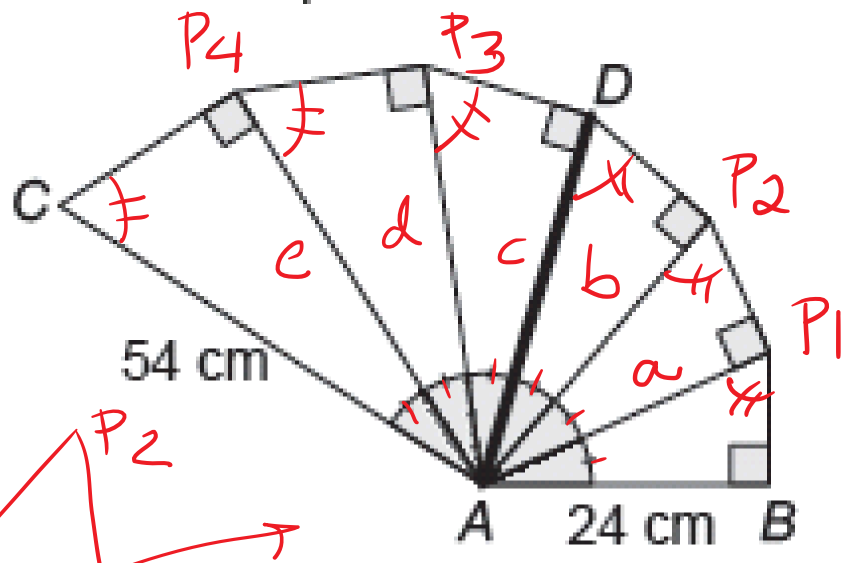
Como os ângulos $A\hat{B}D_1$ e $A'\hat{B'}D_1'$ possuem mesma medida, os triângulos ABD_1 e $A'B'D_1'$ são semelhantes. Logo

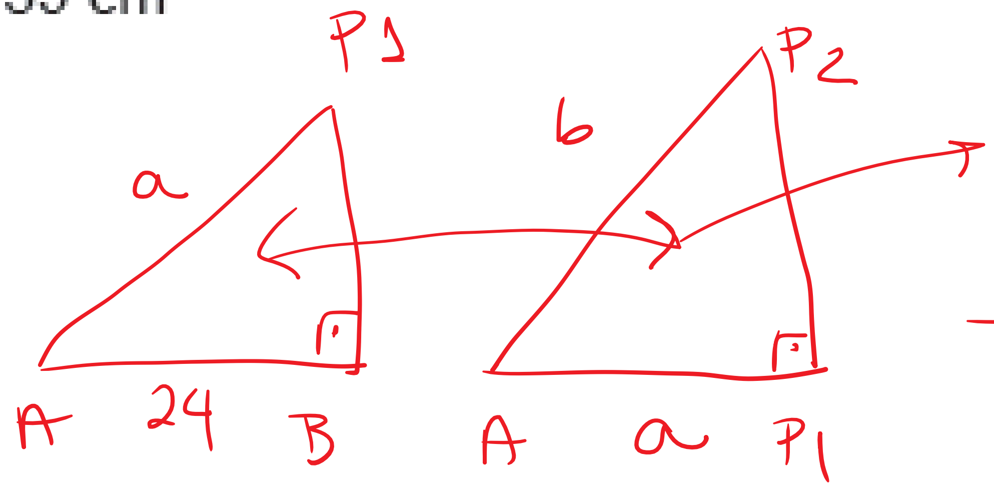
$$k = \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BD_1|}{|B'D_1'|} = k > 0$$

OBMEP 2011, N3

14. Os seis triângulos da figura são retângulos e seus ângulos com vértice no ponto *A* são iguais. Além disso, *AB* = 24 cm e *AC* = 54 cm. Qual é o comprimento de *AD*?

A) 30 cm
B) 34 cm
C) 36 cm
D) 38 cm
E) 39 cm





$$\frac{a}{b} = \frac{24}{a}$$

analisando as outras semelhanças

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{24}{a} = \frac{b}{c}} = \boxed{\frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{54}}$$

$a^2 = 24b$

$24c = ab$

$ac = b^2$

$24c = ab$

$24ca = aba$

$24b^2 = a^2b$

$$\frac{a \cdot 24 \cdot b}{bac} = \frac{cde}{de \cdot 54}$$

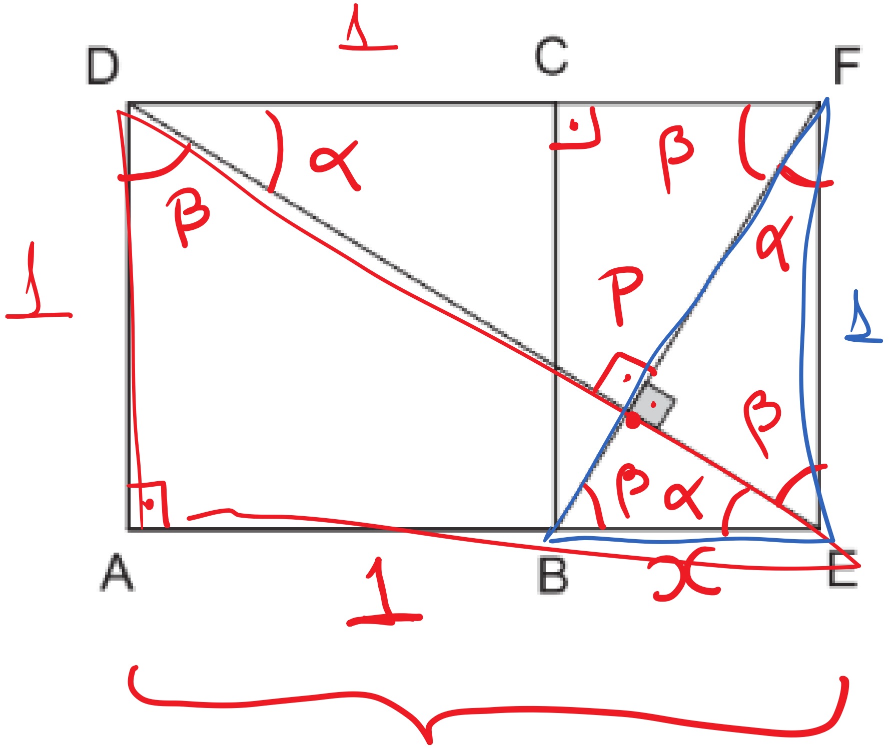
$$\frac{24\cancel{a}\cancel{b}}{\cancel{a}\cancel{b}c} = \frac{c\cancel{d}\cancel{e}}{\cancel{d}\cancel{e}\cdot 54} \Rightarrow \frac{24}{c} = \frac{c}{54}$$

$$\Rightarrow c^2 = 24 \times 54 = 36^2$$

$$\Rightarrow c = 36$$

OBMEP 2011, N3

13. Na figura, AEFD é um retângulo, ABCD é um quadrado cujo lado mede 1 cm e os segmentos BF e DE são perpendiculares. Qual é a medida, em centímetros, do segmento AE?



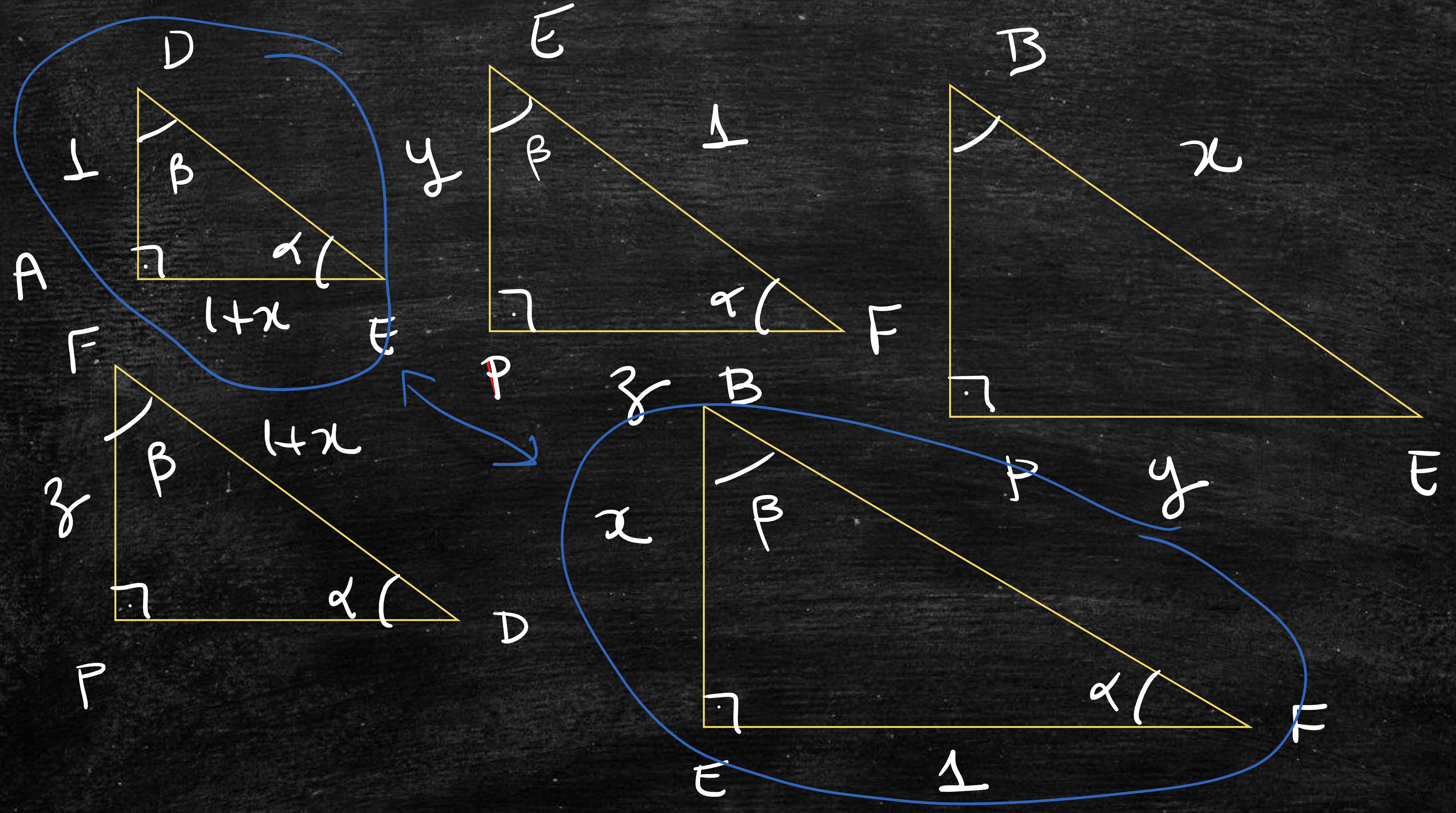
A) $\sqrt{2}$

B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C) 2

D) $\dfrac{8}{5}$

E) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



D
1
β
α
A
1+x
E
y
E
β
1
α
F
P
B
x
F
β
1+x
z
α
D
P
z
B
x
β
P
y
E
α
F
E
1

$$\frac{1}{x} = \frac{1+x}{1} \Rightarrow x(1+x) = 1$$

$$x + x^2 = 1$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 + 1 = 5$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$1 + x = 1 \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Áreas

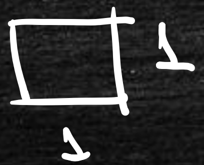
- Área: medida associada a uma superfície, no nosso caso, uma figura plana: principais polígonos convexos.

Intuitivamente, a área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado.

Áreas

- Área: medida, necessidade de unidade, e será expressa por um número real.

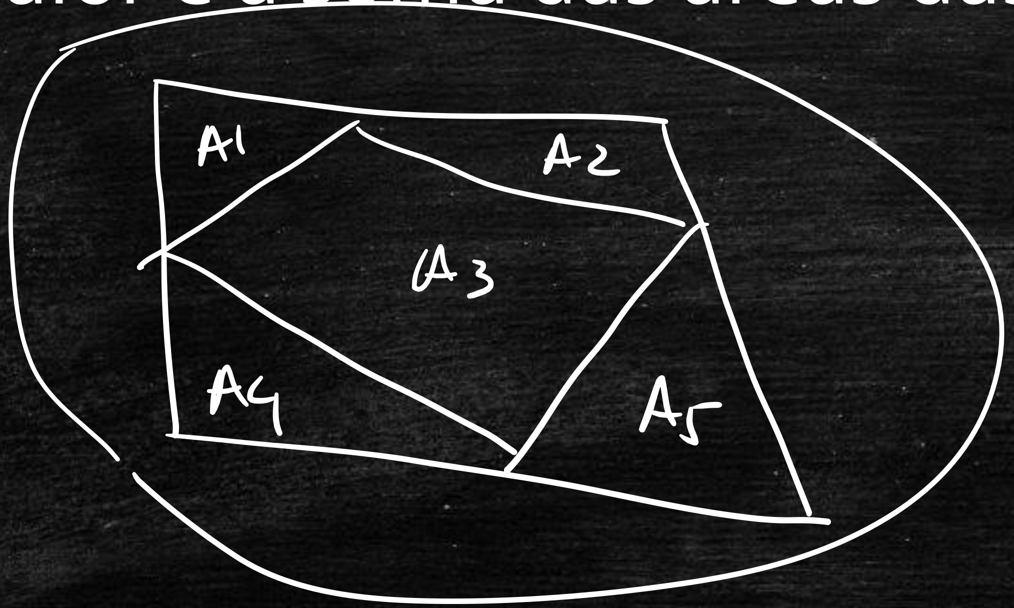
- A área de um quadrado de lado medindo 1 u.c. (unidade de comprimento) é 1 u.a. (unidade de área).

1 u.a. = área de 

- Figuras congruentes possuem mesma área.

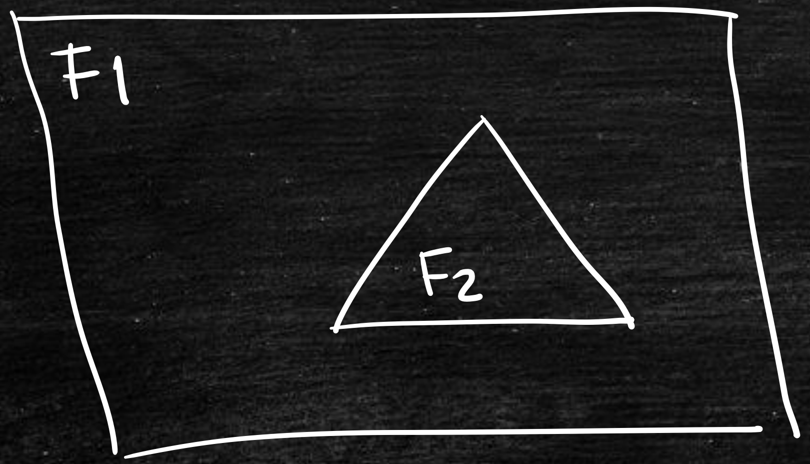
Áreas

- Se uma figura plana é particionada em um número finito de outras figuras planas, as quais não têm pontos interiores comuns), então a área da figura maior é a soma das áreas das figuras menores.



Áreas

- Se uma figura (maior) contém outra (menor) em seu interior, então a área da figura maior é maior que a área da figura menor.

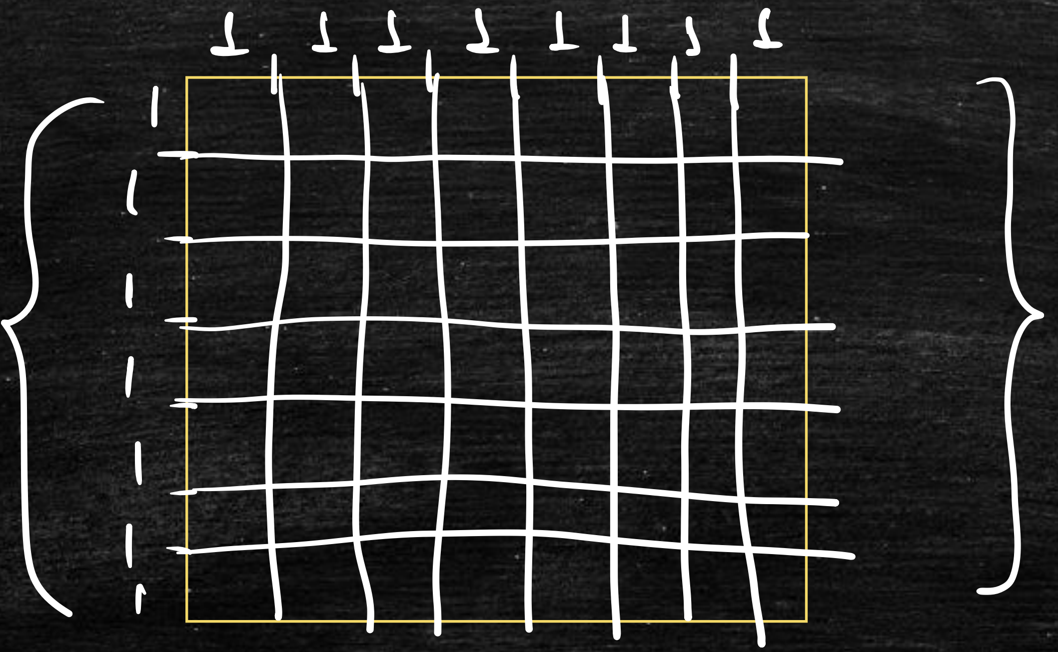


$\text{área}(F_1) > \text{área}(F_2)$

Áreas

- A área de um quadrado de lado ℓ u.c. é ℓ^2 u.a.
- O número $\ell \in \mathbb{R}$. Vamos separar em casos:
- 1) $\ell \in \mathbb{N}$.

ℓ segmentos de lado 1 u.c.



$\ell \in \mathbb{N}$

ao dividir o lado l em l segmentos de medida 1 u.c., subdividimos o quadrado em l^2 quadrados de lado 1. u.c.

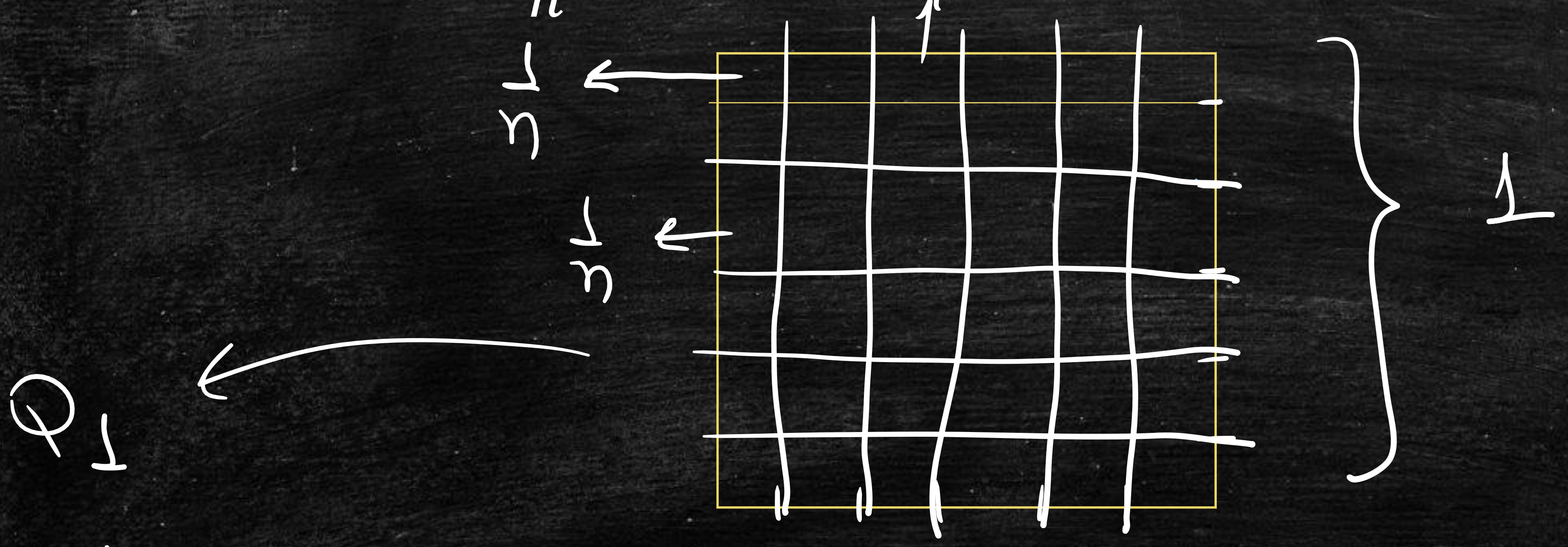
portanto, a área de Q_l (quadrado de lado l) é a soma das áreas dos l^2 quadrados $Q1$.

$$\text{área}(Q\,l) = l^2 \underbrace{\text{área}(Q1)}_{u.a.} = l^2 . u.a.$$

Áreas

- 2) $\ell \in \mathbb{Q}$.
- 2.1) $\ell = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$.

$\frac{1}{n}$



divido o lado de medida 1 em n partes iguais obtendo $\underbrace{n^2}$ quadrados de lado $\frac{1}{n}$.

O quadrado Q_1 foi decomposto em n^2 quadrados $Q_{\frac{1}{n}}$

$$\underbrace{\text{área}(Q_1)}_{1} = n^2 \, \text{área}\left(Q_{\frac{1}{n}}\right)$$

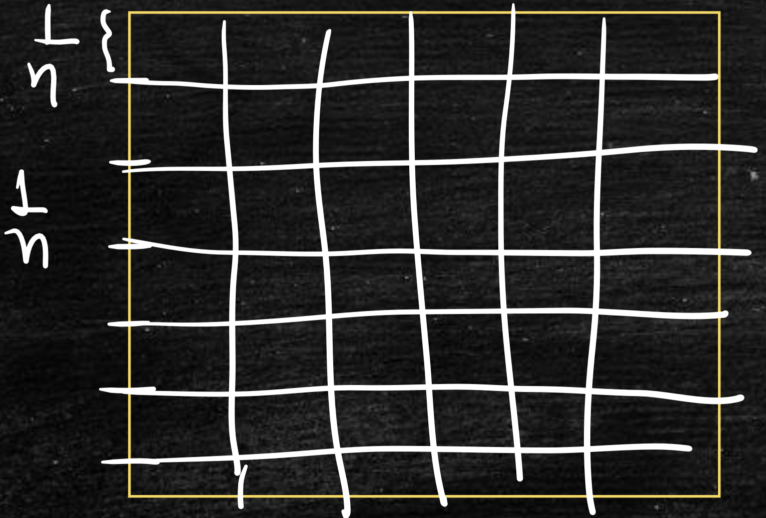
$$1 = n^2 \cdot \text{área}\left(Q_{\frac{1}{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \text{área}\left(Q_{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \text{ u.a.}$$

Áreas

- 2) $\ell \in \mathbb{Q}$.
- 2.2) $\ell = \dfrac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$.

divido o lado em n partes



$\dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$

divido o quadrado $Q_{\frac{m}{n}}$ em m^2 quadrados $Q_{\frac{1}{n}}$

$$\text{área}\left(Q_{\frac{m}{n}}\right) = m^2 \cdot \text{área}\left(Q_{\frac{1}{n}}\right) = m^2 \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = l^2 \text{ u.a.}$$

Áreas

- 3) Caso geral $\ell \in \mathbb{R}$ - Método de Exaustão
- Propriedade da tricotomia dos números reais: "dados quaisquer dois números reais x e y, então vale uma apenas uma das seguintes relações

$$x < y, x = y \text{ } ou \text{ } y < x$$

- Densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$: "entre dois números reais sempre existe um número racional".

Seja agora um quadrado de lado l, denotamos por Q_l. Queremos mostrar que $Q_l = l^2$.

Seja $x = \text{área}(Q_l)$. Estratégia.

1) $x < l^2$ - - - - - - - $\not\downarrow$ ✗✗

2) $x > l^2$ —— - - - —— $\not\downarrow$ ✗✗

3) $\therefore$ $x = l^2$

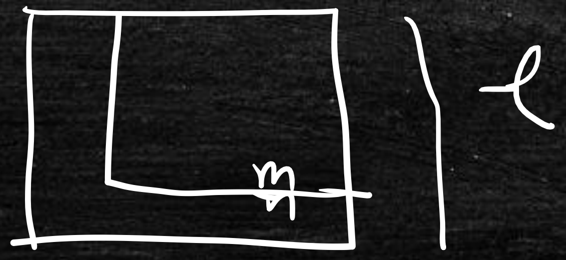
$x =$ área (Q_ℓ) $\quad$? $x = \ell^2$

supor $x < \ell^2 \Rightarrow 0 < x < \ell^2$.

Logo $0 < \sqrt{x} < \ell$. Pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, existe um número racional $\frac{m}{n}$ entre $\sqrt{x}$ e ℓ.

$$\sqrt{x} < \frac{m}{n} < \ell$$

$$\Rightarrow Q_{\frac{m}{n}} \subset Q_\ell$$



logo $\text{área}(Q\,\frac{m}{n}) < \text{área}(Q\,\ell)$

$$\frac{m^2}{n^2} < x$$

mas $0 < \sqrt{x} < \frac{m}{n}$

$$x < \frac{m^2}{n^2}$$

contradição

Áreas

- Área de um Retângulo.

  quadrilátero

  um ~~polígono~~ com angulos internos igual a 90 $\boxed{\text{com lados paralelos 2 a 2}}$

Prova-se pelo mesmo método que fizemos com o quadrado, que

$$\text{área}(R_{ab}) = a \cdot b.$$

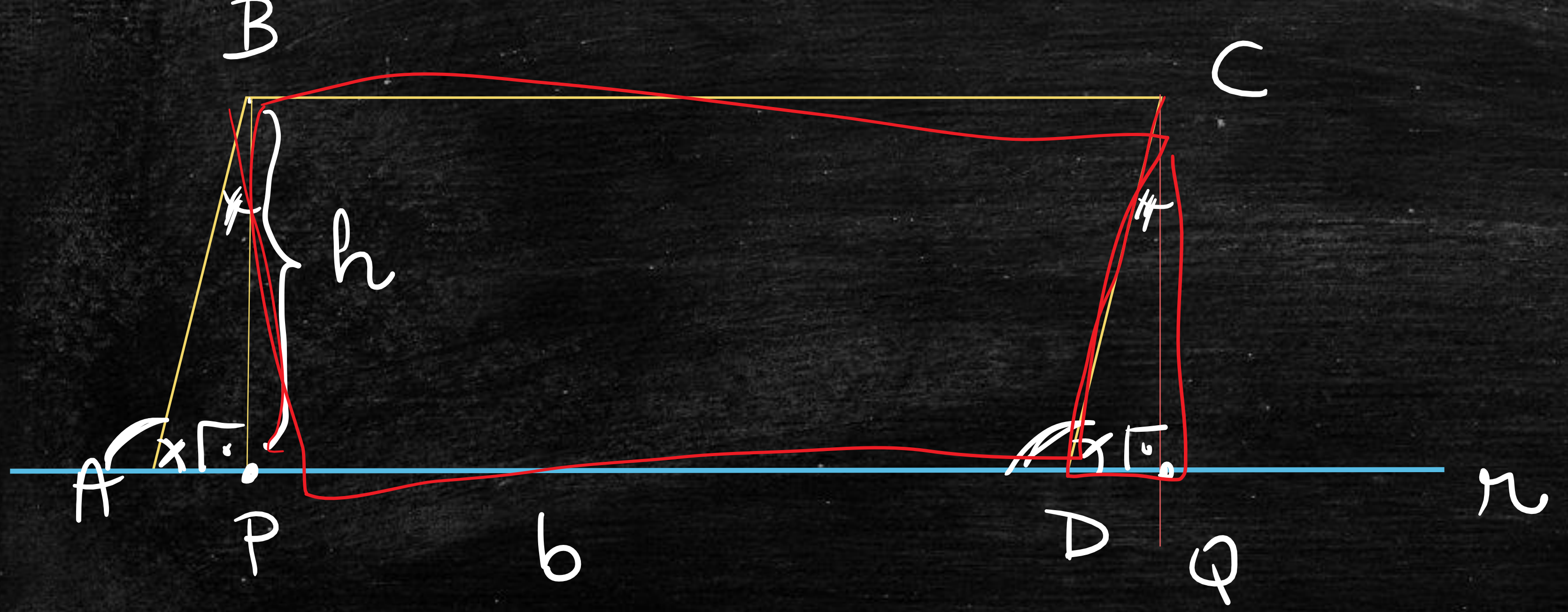
R_{ab}

$$\text{área}(R_{ab}) = ab$$

Áreas

- Área de um Paralelogramo.

Um paralelogramo é um quadrilátero de tal forma que lados opostos são paralelos.



$ABP \equiv DCQ$

$|BA| = |CD|$

área (ABP) = área (DCQ)

BPCQ é um retângulo.

área (BPCQ) = b . h

área (ABCD) = área (APB) + área (BPDC)

= área (DCQ) + área (BPDC) = área (BPCQ)

= b . h.