Um teorema sobre transformações lineares

Denis de Assis Pinto Garcia

18 de novembro de 2023

Teorema 1. *Sejam V e W espaços vetoriais, e seja $T\colon V \to W$ uma transformação linear. Nessas condições:*

(a) T é injetora se, e somente se, leva subconjuntos LI de V em subconjuntos LI de W;

(b) T é sobrejetora se, e somente se, leva conjuntos geradores de V em conjuntos geradores de W; e

(c) T é bijetora se, e somente se, leva bases de V em bases de W.

Demonstração. (a)

($\Rightarrow$)

Suponhamos, inicialmente, que T seja injetora. Nesse caso, é fácil ver que, se $B \coloneqq \{v_1, \ldots, v_k\}$, em que $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, é um subconjunto LI de V, então, para quaisquer $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} a_1 T(v_1) + \ldots + a_k T(v_k) = 0_W &\Rightarrow T(a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k) = 0_W = T(0_V) \\ &\Rightarrow a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k = 0_V \\ &\Rightarrow a_1 = \ldots = a_k = 0. \end{aligned}$$

Logo, T leva subconjuntos LI finitos de V em subconjuntos LI de W. E, como um subconjunto (possivelmente infinito) de V ou de W é LI se, e somente se, cada um de seus subconjuntos finitos o é, disso resulta que T leva subconjuntos LI de V em subconjuntos LI de W.

($\Leftarrow$)

Suponhamos, agora, que T leve subconjuntos LI de V em subconjuntos LI de W. Como, para cada $v \in V$,

$$\begin{aligned} v \neq 0_V &\Leftrightarrow \{v\} \text{ é um subconjunto LI de } V \\ &\Leftrightarrow \big\{T(v)\big\} \text{ é um subconjunto LI de } W \\ &\Leftrightarrow T(v) \neq 0_W, \end{aligned}$$

disso decorre que $\ker(T) = \{0_V\}$. Logo, T é injetora.

(b)

($\Rightarrow$)

Suponhamos que T seja sobrejetora. Para concluirmos que T leva conjuntos geradores de V em conjuntos geradores de W, fixemos um conjunto gerador qualquer de V, o qual chamaremos de G, e vamos mostrar que $T(G) = W$. Para tanto, notemos, inicialmente, que, como, por hipótese, T é sobrejetora, $T(V) = W$. Logo, dado $w \in W$, existe v em V tal que $T(v) = w$. Por sua vez, como G é um conjunto gerador de V, dado $v \in V$ tal que $T(v) = w$, podemos fixar $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ e $v_1, \ldots, v_k \in G$ de modo que $v = a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k$. Feito isso, notemos que, como $v_1, \ldots, v_k \in G$, e como

$$w = T(v) = T(a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k) = a_1 T(v_1) + \ldots + a_k T(v_k),$$

$w \in [T(G)]$. E, como w em W é completamente arbitrário, disso resulta, por fim, que $[T(G)] = W$.

($\Leftarrow$)

Se T leva conjuntos geradores de V em conjuntos geradores de W, então, como V é, ele próprio, um conjunto gerador de V, podemos concluir, em particular, que $W = [T(V)] = T(V)$ — o que, por sua vez, mostra-nos que, nesse caso, T é sobrejetora.

(c)

($\Rightarrow$)

Se T é bijetora, então é também injetora e sobrejetora. Logo, nesse caso, T leva subconjuntos LI de V em subconjuntos LI de W e conjuntos geradores de V em conjuntos geradores de W e, por conseguinte, leva bases de V em bases de W.

($\Leftarrow$)

Suponhamos que T leve bases de V em bases de W e vamos mostrar que, nesse caso, T leva subconjuntos LI de V em subconjuntos LI de W e conjuntos geradores de V em conjuntos geradores de W. Disso resultará, em vista dos itens anteriores, que T é uma bijeção.

Prova de que T leva subconjuntos LI de V em subconjuntos LI de W.

Seja L um subconjunto LI de V, e seja B uma base de V tal que $L \subseteq B$. Como, por hipótese, B é uma base de V, $T(B)$ é uma base de W. Por sua vez, como $L \subseteq B$, $T(L) \subseteq T(B)$. Logo, $T(L)$ é LI (pois $T(B)$ é LI, e todo subconjunto de um conjunto LI é também LI).

Prova de que T leva conjuntos geradores de V em conjuntos geradores de W.

Seja G um conjunto gerador de V, e seja B uma base de V tal que $B \subseteq G$. Como, por hipótese, B é uma base de V, $T(B)$ é uma base de W. Por sua vez, como $B \subseteq G$, $T(B) \subseteq T(G)$. Logo, $T(G)$ gera W (pois $T(B)$ gera W, e todo conjunto que contém um conjunto gerador de W é também um conjunto gerador de W). $\square$