Teste de Hipoteses para a variancia

(V2)

Teste de hipoteses

Exemplo do livro Morettin/Bussab:

Exemplo 12.1. Uma indústria usa, como um dos componentes das máquinas que produz, um parafuso importado, que deve satisfazer a algumas exigências. Uma dessas é a resistência à tração. Esses parafusos são fabricados por alguns países, e as especificações técnicas variam de país para país. Por exemplo, o catálogo do país A afirma que a resistência média à tração de seus parafusos é de 145 kg, com desvio padrão de 12 kg. Já para o país B, a média é de 155 kg e desvio padrão 20 kg.

Um lote desses parafusos, de origem desconhecida, será leiloado a um preço muito convidativo. Para que a indústria saiba se faz ou não uma oferta, ela necessita saber qual país produziu tais parafusos. O edital do leiloeiro afirma que, pouco antes do leilão, será divulgada a resistência média $\bar{x}$ de uma amostra de 25 parafusos do lote. Qual regra de decisão deve ser usada pela indústria para dizer se os parafusos são do país A ou B?

Variável aleatória de interesse: X = "resistência de um parafuso desse lote"

X_A A: $\mu = EX_A = 145$ kg $\sigma = \sqrt{var(X_A)} = 12$ kg

X_B B: $\mu = EX_B = 155$ kg $\sigma = \sqrt{var(X_B)} = 20$ kg

Tomo uma amostra $X_1, X_2, \dots, X_n$ do lote de procedência desconhecida A ou B

Como decido qual teria sido a fabrica que produziu?

Preciso ter alguma "regra de decisao" a partir dos dados da amostra.

Duas hipoteses: "Foi fabricado por A"
"Foi fabricado por B"

H_0 ou H
H_1 $\quad$ A

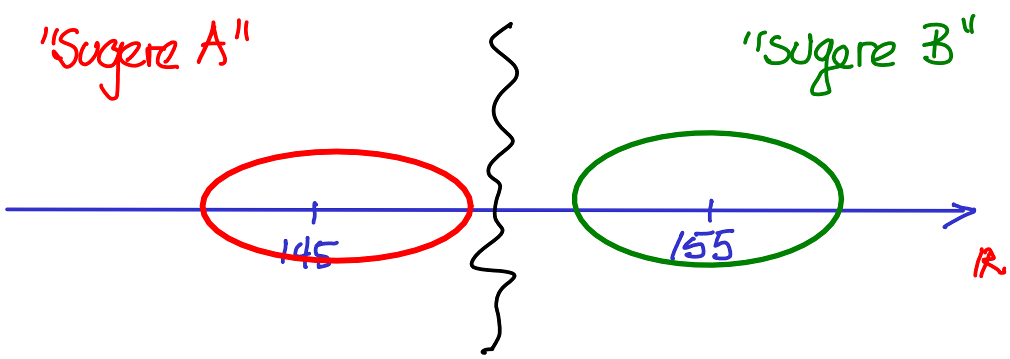
Hipotese REAL (desconhecida)

Conclusao ou Decisao do Teste

	A	B
A	ok	erro
B	erro	ok

Regra de decisao "Natural": observo $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ média amostral

"Estatística do teste"



Onde "MUDA A DECISÃO"?

H_0 = "hipótese nula"

H_1 = "hipótese alternativa"

Hipotese REAL (desconhecida)

Conclusao ou Decisao do Teste

	H_0	H_1
H_0	ok	erro II
H_1	erro I	ok

erro I = "Rejeitar a hipotese nula H_0 quando ela e' verdadeira"

erro II = "Aceitar a hipotese nula H_0 quando ela e' falsa"

$$\alpha = P(\text{erro I}) = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeiro})$$

$$\beta = P(\text{erro II}) = P(\text{Aceitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falso})$$

Em geral os dois erros podem acarretar consequencias bastante distintas e definimos H_0 e H_1

de tal forma que o erro I seria o "mais grave", cuja probabilidade quero que seja pequena.

Por que nao construir um teste com $\alpha = 0$?

Ou um teste com $\beta = 0$?

Ou ainda com ambos iguais a zero?

Em geral, fixamos a probabilidade do erro I e construimos o teste.

Por exemplo, fixemos α em 5%, e vejamos qual a regra de decisão correspondente. Temos

$$\alpha = 5\% = P(\text{erro I}) = P(\bar{X} \leq \bar{x}_c | \underline{\bar{X} \sim N(155,16)})$$
$$= P(Z \leq -1{,}645),$$

se H_0 for verdadeiro

mas da transformação para a normal padrão sabemos que

$$-1{,}645 = \frac{\bar{x}_c - 155}{4},$$

ou seja, $\bar{x}_c = 148{,}42$. Então, a regra de decisão será:

Se $\bar{x}$ for inferior a 148,42, dizemos que o lote é de A; caso contrário, dizemos que é de B.

concluo A

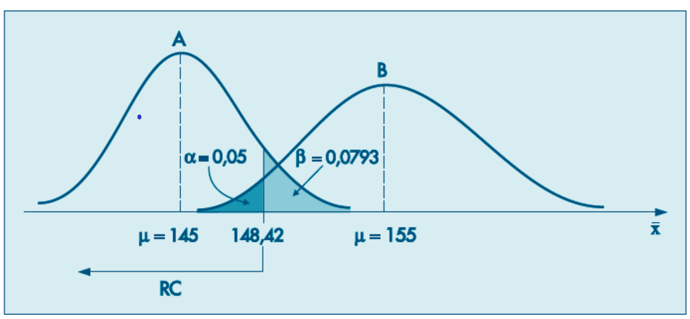
concluo B

valor crítico $= 148{,}42$

Com essa regra, a probabilidade do erro de tipo II será

$$\beta = P(\text{erro II}) = P(\bar{X} > 148{,}42 | \bar{X} \underline{\sim (145;\ 5{,}76)})$$
$$= P(Z > 1{,}425) = 7{,}93\%.$$

H_0 é falsa $\Rightarrow$ "produzida por B"



(Morettin/Bussab)

Definicao: Denominamos de "Regiao Critica" (RC) o conjunto de valores tal que:

"valor da estatistica do teste esta' em RC" $\Leftrightarrow$ "Rejeito H_0 "

No exemplo acima: $\bar{X}$

Ja' foi discutido:

1) Teste sobre a media de uma populacao com variancia conhecida.

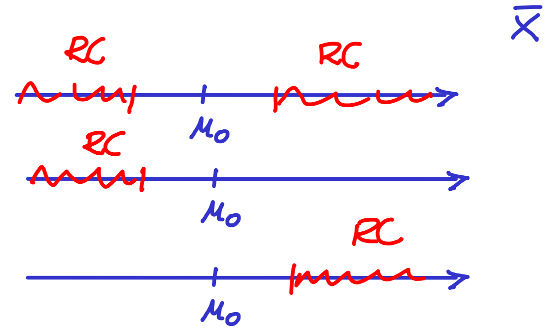
$H_0: \mu = \mu_0 \quad (\sigma \text{ conhecido})$

e ha' tres tipicas hipoteses alternativas:

$H_1: \mu \neq \mu_0 \quad (\sigma \text{ conhecido})$

$H_1: \mu < \mu_0 \quad (\sigma \text{ conhecido})$

$H_1: \mu > \mu_0 \quad (\sigma \text{ conhecido})$



2) Teste para a proporcao.

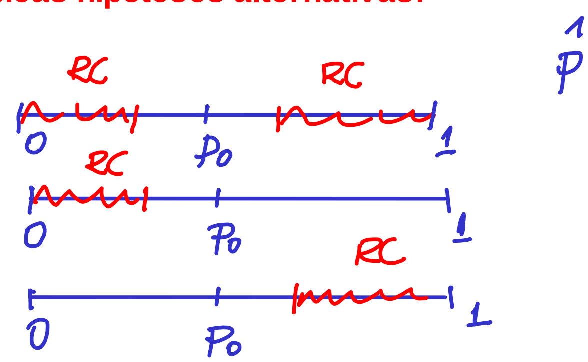
$H_0: p = p_0$

e ha' tres tipicas hipoteses alternativas:

$H_1: p \neq p_0$

$H_1: p < p_0$

$H_1: p > p_0$



3) Valor-p (ou p-valor, "nivel descritivo" ou ainda "nivel de significancia"...)

4) Teste sobre a media de uma Normal com variancia desconhecida.

A estatística do teste é

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

aprox.
para n grande.

Obs: para n pequeno temos a distribuicao t se a amostra

$X_1, X_2, \ldots X_n$ é i.i.d. com $X_i \sim N(\mu; \sigma^2)$

5) Vamos considerar agora um teste sobre a variancia de uma variavel aleatoria que sabemos ter distribuicao Normal.

Teste para a variancia:

Suponha que assumimos que a variável de interesse X satisfaz $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

e temos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra casual simples de X.

Queremos agora testar

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Qual seria a Estatistica adequada para usar neste teste?

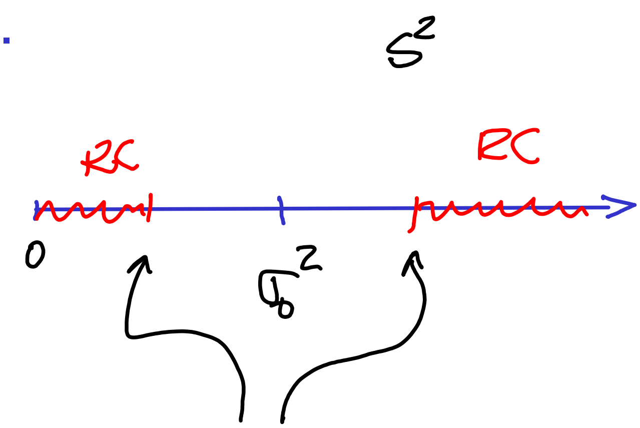
Ideia "natural": estimo σ^2

pela variancia amostral $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

Se o valor observado de S^2 **estiver "longe de** σ_0^2**"**

$\Rightarrow$ **Rejeito** H_0

Caso contrario, "aceito H_0 **".**



como determino?

Preciso de informacao sobre "qual e' o erro tipico" entre

S^2 e σ^2

Ja' vimos que ,

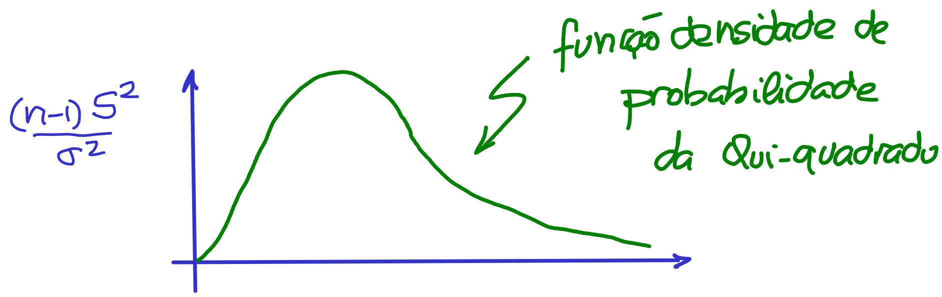
se $X_1, X_2, \dots, X_n$ é uma amostra casual simples

de $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

então

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Distribuicao Qui-quadrado com (n-1) graus de liberdade.



Voltando `a "ideia natural" para testar:

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Fixo o valor de α = **probabilidade do erro tipo I**

Sobre a hipotese que H_0 **e' versadeiro, tenho que** $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

Encontro A e B tal que

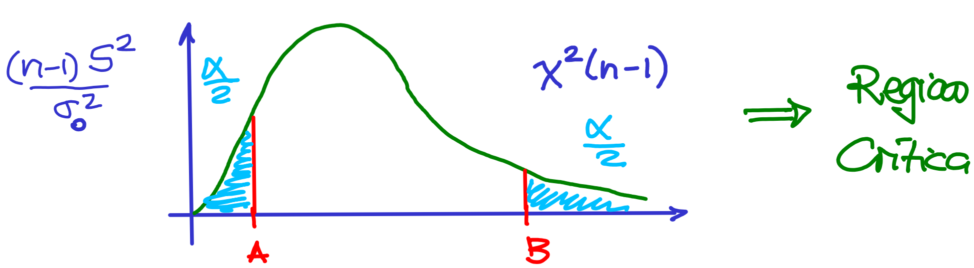
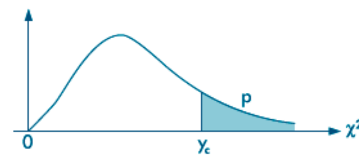


Tabela IV — Distribuição Qui-quadrado

$Y \sim \chi^2\,(\nu)$

Corpo da tabela dá os valores y_c tais que $P\,(Y > y_c) = p$.

Para valores $\nu > 30$, use a aproximação normal dada no texto.



Graus de liberdade ν	p = 99%	98%	97,5%	95%	90%	80%	70%	50%	30%	20%	10%	5%	4%	2,5%	2%	1%	0,2%	0,1%	Graus de liberdade ν
1	$0,0^{3}16$	$0,0^{3}63$	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	4,218	5,024	5,412	6,635	9,550	10,827	1
2	0,020	0,040	0,051	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	6,438	7,378	7,824	9,210	12,429	13,815	2
3	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	8,311	9,348	9,837	11,345	14,796	16,266	3
4	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	10,026	11,143	11,668	13,277	16,924	18,467	4
5	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	11,644	12,832	13,388	15,086	18,907	20,515	5
6	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	13,198	14,449	15,033	16,812	20,791	22,457	6
7	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	14,703	16,013	16,622	18,475	22,601	24,322	7
8	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	16,171	17,534	18,168	20,090	24,352	26,125	8
9	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	17,608	19,023	19,679	21,666	26,056	27,877	9
10	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	19,021	20,483	21,161	23,209	27,722	29,588	10
11	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	20,412	21,920	22,618	24,725	29,354	31,264	11
12	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	21,785	23,337	24,054	26,217	30,957	32,909	12
13	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	23,142	24,736	25,472	27,688	32,535	34,528	13
14	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	24,485	26,119	26,873	29,141	34,091	36,123	14
15	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	25,816	27,488	28,259	30,578	35,628	37,697	15
16	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	27,136	28,845	29,633	32,000	37,146	39,252	16
17	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	28,445	30,191	30,995	33,409	38,648	40,790	17
18	7,015	7,906	8,231	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	29,745	31,526	32,346	34,805	40,136	42,312	18
19	7,633	8,567	8,906	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	31,037	32,852	33,687	36,191	41,610	43,820	19
20	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	32,321	34,170	35,020	37,566	43,072	45,315	20
21	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	33,597	35,479	36,343	38,932	44,522	46,797	21
22	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	34,867	36,781	37,659	40,289	45,962	48,268	22
23	10,196	11,293	11,688	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	36,131	38,076	38,968	41,638	47,391	49,728	23
24	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	37,389	39,364	40,270	42,980	48,812	51,179	24
25	11,524	12,697	13,120	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	38,642	40,646	41,566	44,314	50,223	52,620	25
26	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	39,889	41,923	42,856	45,642	51,627	54,052	26
27	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	41,132	43,194	44,140	46,963	53,022	55,476	27
28	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,319	34,027	37,916	41,337	42,370	44,461	45,419	48,278	54,411	56,893	28
29	14,258	15,574	16,047	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	43,604	45,722	46,693	49,588	55,792	58,302	29
30	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	44,834	46,979	47,962	50,892	57,167	59,703	30
	p = 99%	98%	97,5%	95%	90%	80%	70%	50%	30%	20%	10%	5%	4%	2,5%	2%	1%	0,2%	0,1%	

Exemplo (Moretin/Bussab)

Exemplo 12.8. Uma das maneiras de manter sob controle a qualidade de um produto é controlar sua variabilidade. Uma máquina de encher pacotes de café está regulada para enchê-los com média de 500 g e desvio padrão de 10 g. O peso de cada pacote X segue uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Colheu-se uma amostra de 16 pacotes e observou-se uma variância de $S^2 = 169$ g^2. Com esse resultado, você diria que a máquina está desregulada com relação à variância?

$\sigma_0^2 = 100$

Estamos interessados em testar, então,

$$H_0 : \sigma^2 = 100,$$
$$H_1 : \sigma^2 \neq 100.$$

$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$

$n = 16$

$\sigma_0 = 10$

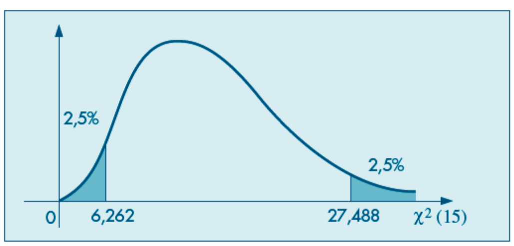
A estatística para realizar o teste é (12.5), com $n = 16$. Fixado o nível de significância α em 5%, teremos da Tabela IV que a região crítica é dada por RC = $\{\chi^2 : 0 \leqslant \chi^2 \leqslant 6{,}262$ ou $\chi^2 \geqslant 27{,}488\}$. Veja a Figura 12.12. O valor observado da estatística é

tomando $\alpha = 5\%$

valor observado para $\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2}$

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{(15)(169)}{100} = 25{,}35.$$

Figura 12.12: Região crítica para o teste do Exemplo 12.8.



Como $\chi_0^2 \notin RC \Rightarrow$ Aceito H_0

13.2 Comparação das Variâncias de Duas Populações Normais

A situação que vamos considerar nesta seção envolve a utilização da distribuição F, estudada na seção 7.7. A descrição a seguir é importante.

Uma das distribuições amostrais mais usadas, e que corresponde a uma distribuição F, resulta do seguinte problema. Suponha que temos duas amostras independentes, de tamanhos n_1 e n_2, retiradas de duas populações normais com a mesma variância σ^2. Indiquemos os estimadores de σ^2 obtidos das amostras por S_1^2 e S_2^2, respectivamente. Já vimos que

$$U = \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 - 1),$$

$$V = \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2 - 1),$$

e portanto a v.a.

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{\dfrac{U}{n_1 - 1}}{\dfrac{V}{n_2 - 1}} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1). \tag{13.3}$$

Exemplo 13.2. Queremos verificar se duas máquinas produzem peças com a mesma homogeneidade quanto à resistência à tensão. Para isso, sorteamos duas amostras de seis peças de cada máquina, e obtivemos as seguintes resistências:

Máquina A:	145	127	136	142	141	137
Máquina B:	143	128	132	138	142	132

As hipóteses a serem testadas são:

$$H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$$
$$H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2.$$

Sob a suposição de normalidade das medidas de resistência à tensão, para as duas máquinas, temos que a v.a. W, definida por (13.4), tem uma distribuição $F(5,5)$. Fixando $\alpha = 0,10$ e consultando a Tabela VI, teremos

$$\text{RC} =]0,\ (5,05)^{-1}[\cup]5,05,\ +\infty[.$$

Das amostras encontramos $s_A^2 = 40$ e $s_B^2 = 37$, portanto $w_0 = 1,08$. Como esse valor não pertence à região crítica, aceitamos H_0, ou seja, as máquinas produzem com a mesma homogeneidade quanto à variabilidade.

Caso tivéssemos rejeitado a hipótese de igualdade das variâncias, seria conveniente obter um intervalo de confiança para o quociente das duas variâncias. De (13.3) podemos escrever, quando $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$,

$$W = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{U/(n-1)}{V/(m-1)} \sim F(n-1,\ m-1),$$

e para um dado γ, $0 < \gamma < 1$, podemos encontrar dois valores f_1 e f_2, tais que

$$P(f_1 < F(n-1,\ m-1) < f_2) = \gamma.$$

Dessa igualdade, segue-se que, com probabilidade γ,

$$f_1 < \frac{S_1^2}{S_2^2}\,\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < f_2,$$

ou seja, o $\text{IC}(\sigma_2^2/\sigma_1^2;\ \gamma)$ será dado por

$$f_1\,\frac{S_2^2}{S_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < f_2\,\frac{S_2^2}{S_1^2} \qquad (13.5)$$

Exemplo 13.3. Suponha que para outras seis medidas para as máquinas A e B do Exemplo 13.2 tivéssemos $S_A^2 = 85$ e $S_B^2 = 8$. Como $w_0 = 85/8 = 10,62$, rejeitaríamos H_0. Então, o IC dado por (13.5) ficaria, com $\gamma = 0,90$,

$$\frac{1}{5,05}\,\frac{8}{85} < \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} < 5,05\,\frac{8}{85},$$

Exemplo 13.3. Suponha que para outras seis medidas para as máquinas A e B do Exemplo 13.2 tivéssemos $S_A^2 = 85$ e $S_B^2 = 8$. Como $w_0 = 85/8 = 10{,}62$, rejeitaríamos H_0. Então, o IC dado por (13.5) ficaria, com $\gamma = 0{,}90$,

$$\frac{1}{5{,}05}\,\frac{8}{85} < \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} < 5{,}05\,\frac{8}{85},$$

ou seja,

$$0{,}019 < \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} < 0{,}475.$$

Invertendo-se, obtemos, também,

$$2{,}10 < \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} < 52{,}6,$$

que indica a variação possível, no nível fixado, da razão entre as duas variâncias. Note que, sob H_0, temos $\sigma_A^2/\sigma_B^2 = 1$, que não pertence a esse intervalo.