# MAT0122 - Álgebra Linear I
# Lista 6 - 2023

1. Quais da funções $T$ de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ são transformações lineares?
   (a) $T(x,y) = (1+x,y)$;
   (b) $T(x,y) = (y,x)$;
   (c) $T(x,y) = (\text{sen}(x),y)$;
   (d) $T(x,y) = (x-y,x)$.

2. Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1,1) = (1,0)$ e $T(1,-1,1) = (0,1)$?

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (x-y+2z, 2x+y, -x-2y+2z)$.
   (a) Verifique que $T$ é uma transformação linear.
   (b) Determine uma base de $\text{Ker}T$ e uma base de $\text{Im}T$.

4. Construa uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Im}T = [(1,0,1),(1,2,2)]$. Determine $T(x,y,z)$.

5. Construa uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\text{Ker}T = \text{Im}T$.

6. Seja $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ definida por $T(X) = AX - XA$, onde $A$ é uma matriz fixa. Mostre que $T$ é transformação linear e descreva seu núcleo.

7. Seja $V$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $T \in L(V)$. Prove que as afirmações a seguir são equivalentes.
   (a) $\text{Ker}T \cap \text{Im}T = \{0\}$.
   (b) Se para $v \in V$, $T(T(v)) = 0$ então $T(v) = 0$.

8. Seja $V$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $T \in L(V)$. Suponha que $T \circ T = T$. Mostre que $V = \text{Ker}T \oplus \text{Im}T$. (Dê um exemplo de tal transformação linear com $T \neq 0$ e $T \neq I$.)

9. Determine uma base do núcleo e uma base da imagem de cada uma das transformações lineares a seguir.
   (a) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ definida por $T(x_1, x_2, \cdots x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$.
   (b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, definida por $T(X) = AX$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   (c) $T : P_n(\mathbb{R}) \to P_{n+1}(\mathbb{R})$ definida por $T(p(t)) = tp(t)$.

10. Sejam $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ transformações lineares.
    (a) Prove que $S \circ T$ não é inversível.
    (b) Dê um exemplo em que $T \circ S$ é inversível e outro em que $T \circ S$ não é inversível.

11. Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(V)$. Prove que $V = \text{Ker}T \oplus \text{Im}T$ se, e somente se, $\text{Ker}T = \text{Ker}(T \circ T)$.

12. Sejam $V$ e $U$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, $T \in L(U,V)$ e $S \in L(V,U)$. Assinale **V**(verdadeiro) ou **F**(falso) nas seguintes afirmações:
    - ( )$S \circ T$ sobrejetora $\Rightarrow$ $S$ sobrejetora.
    - ( )$S \circ T$ sobrejetora $\Rightarrow$ $T$ sobrejetora.
    - ( )$S \circ T$ injetora $\Rightarrow$ $S$ injetora.
    - ( )$S \circ T$ injetora $\Rightarrow$ $T$ injetora.

13. Ache uma base para o núcleo e para a imagem de cada uma das transformações lineares a seguir. Ache a matriz de $T$ relativamente às bases canônicas dos espaços vetoriais.

    (a) $T \in L(\mathbb{R}^3)$, $T(x,y,z) = (-3y+4z, 3x+5z, -4x-4y)$;

    (b) $T \in L(P_3(\mathbb{R}))$ , $T(p(t)) = p(t+1)$;

    (c) $T \in L(P_n(\mathbb{R}))$, $T(p(t)) = p'(t)$;

14. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida por

$$T(at^2+bt+c) = \begin{bmatrix} a-2b & b+c \\ c-3a & a+b+c \end{bmatrix}.$$

    Determine uma base de Ker$T$ e uma base de Im$T$.

15. **NOTAÇÃO:** Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Denote por $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $T_A(x_1,...,x_n) = (y_1,\cdots,y_m)$ onde $A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$.

    Determine bases do **núcleo** e da **imagem** das transformações lineares $T_A$ definidas pelas matrizes $A$ abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 13 & -16 & 2 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & -8 & -6 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -8 & -5 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

16. Seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$[T]_B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

    onde $B$ é a base $B = \{(1,1,1),(1,2,1),(1,1,3)\}$. Determine $[T]_{can}$.

17. Considere $P_n(\mathbb{R})$ e $I \in L(P_n(\mathbb{R}))$ a identidade. Determine a matriz $[I]_{can,B}$, onde $B$ é a base definida no Exercício 10 da Lista 5 e $can = \{1, t, t^2, \cdots t^n\}$. Note que você obtém uma demonstração do fato de que a matriz de Vandermonde

$$\mathbb{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_0^n & c_1^n & \cdots & c_n^n \end{bmatrix}$$

    com $c_i \neq c_j$ se $i \neq j$, é inversível.

18. Seja $T \in L(\mathbb{R}^{n+1}, P_n(\mathbb{R}))$ definida por $T(a_0, a_1, \cdots a_n) = a_0 + a_1 t + \cdots a_n t^n$ e $S \in L(P_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}^{n+1})$ definida por $S(p(t)) = (p(0), p(1), \cdots, p(n))$. Determine $[S \circ T]_{can}$ e note que essa matriz é inversível.

19. Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão 3. Seja $T \in L(V)$ tal que $T^3 = T \circ T \circ T = 0$ (isto é, $T^3(v) = 0$ para todo $v \in V$ mas $T^2 \neq 0$. Seja $u \in V$ tal que $T^2(u) \neq 0$. Mostre que $B = \{u, T(u), T^2(u)\}$ é uma base de $V$ e determine $[T]_B$. Você consegue apresentar um exemplo de um operador linear $T \in L(P_2(\mathbb{R}))$ tal que $T^2 \neq 0$ e $T^3 = 0$?

20. Seja $T \in L(\mathbb{R}^2)$ tal que $T^2 = I$, e $T \neq \pm I$. Mostre que existe uma base $B$ de $\mathbb{R}^2$ tal que, $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.