Problema 11

Observação: Quando escrevi esta resolução não consegui colocar a seta em cima do AB, então toda vez que aparecer "$\leftrightarrow$ AB" estarei me referindo à reta AB e não ao segmento. Também não consegui o sinal da não equivalência, então notem que sempre que eu escrever "não A $\sim_r$ B" estarei dizendo que A não é equivalente a B em relação à r

Seja D um ponto de $\leftrightarrow$BC. Mostre que D pertence ao interior do ângulo $\angle$BAC se e somente se B * D * C.
Demonstração:

Vamos primeiramente mostrar a ida, ou seja, se D pertence ao interior de $\angle$BAC, então B * D * C. Se D pertence ao interior do ângulo, então, por definição de interior de ângulo, temos que: D $\sim_{AC}$ B e D $\sim_{AB}$ C. Por outro lado, D pertence à reta $\leftrightarrow$ BC. D $\neq$ B e D $\neq$ C pois, por definição, B e D estão no ângulo $\angle$BAC enquanto, por hipótese, D está no interior. Logo, pelo axioma (B3) vale uma e somente uma das seguintes possibilidades:
(i) D * B * C
(ii) B * C * D
(iii) B * D * C

Se vale (i), temos que não D $\sim_{AB}$ C, pois, por definição B pertence à $\leftrightarrow AB$ e neste caso D * B * C, contrariando a hipótese.
Analogamente, se vale (ii), temos que não D $\sim_{AC}$ B, pois C pertence à $\leftrightarrow AC$ e B * C * D, contrariando a hipótese.
Portanto, resta apenas a opção (iii), B * D * C.

Agora iremos mostrar a volta, ou seja, se B * D * C, então D pertence ao interior de $\angle$BAC. Vamos mostrar que D $\sim_{AC}$ B e D $\sim_{AB}$ C. Supondo que não D $\sim_{AC}$ B, então, por definição, existe um ponto X em $\leftrightarrow$ AC tal que D * X * B. Se D * X * B então, pela definição de reta, X pertence à $\leftrightarrow$ DB. Por outro lado, o ponto C pertence à $\leftrightarrow$ AC por definição e como, pela hipótese, B * D * C, então C pertence à $\leftrightarrow$ DB. Logo, encontramos dois pontos de interseção entre as retas $\leftrightarrow$ DB e $\leftrightarrow$ AC, segue que X = C pela proposição 2.2. Mas, se X = C, temos que B * D * C e D * C * B, absurdo pelo axioma (B3). Portanto, D $\sim_{AC}$ B.
Analogamente, Mostremos que D $\sim_{AB}$ C. Supondo que não D $\sim_{AB}$ C, então existe um X em $\leftrightarrow$ AB tal que D * X * C. Se D * X * C então X pertence à $\leftrightarrow$ DC. Por outro lado, B pertence à $\leftrightarrow$ AB e pela hipótese, B * D * C, então B pertence à $\leftrightarrow$ DC. Logo, encontramos dois pontos de interseção entre as retas $\leftrightarrow$ DC e $\leftrightarrow$ AB, segue que X = B pela proposição 2.2. Mas, se X = B, temos que B * D * C e D * B * C, absurdo pelo axioma (B3). Portanto, D $\sim_{AC}$ B.

Por fim, como mostramos que vale D $\sim_{AC}$ B e D $\sim_{AB}$, então D pertence ao interior de $\angle$BAC