

PNV 5856

METODOLOGIA DE CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS

AULA 6

Prof. Helio Mitio Morishita

2022

PNV5856 Metodologia de Controle no Espaço de Estados

OBSERVADOR DE LUENBERGUER



Controle por alocação de polos

Seja as seguintes equações no espaço de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$y = Cx \quad (2)$$

onde $x \in \mathbb{R}^{k \times 1}$, $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times m}$

No controle por alocação de polos foi admitido que todo o vetor de estado era acessível através de medições, e que a lei de controle é dada por:

$$u = -Gx \quad (3)$$

Substituindo a Eq. (3) em (1) tem-se:

$$\dot{x} = (A - BG)x \quad (4)$$

Seja $A_c = A - BG$. O objetivo no controle por alocação de pólos é determinar a matriz G tal que os autovalores da matriz A_c coincidam com os pólos desejados.

Mas para a implementação da lei de controle definida pela Eq. (3) é necessário o acesso a todos os componentes do vetor x . Para isto, se o vetor y for da mesma dimensão do vetor de estado, e se a matriz C for não singular, pode-se obter o vetor de estado facilmente através de:

$$x = C^{-1}y$$

Mas em geral este não é caso.

OBSERVADOR DE LUENBERGER

A alternativa para este caso é tentar obter uma estimativa $\hat{x}$ do vetor de estado x . A melhor maneira de efetuar isto é fazer com que a estimativa $\hat{x}$ seja a solução da seguinte equação:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u + Ky \quad (5)$$

As matrizes $\hat{A}$, $\hat{B}$ e K devem ser selecionados de tal modo que minimize o erro

$$e = x - \hat{x} \quad (6)$$

Considerando-se as Eqs (1) e (5), a equação diferencial do erro é dada por:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = \hat{A}e + (A - KC - \hat{A})x + (B - \hat{B})u \quad (7)$$



$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = \hat{A}e + (A - KC - \hat{A})x + (B - \hat{B})u \quad (7)$$

Considere agora a Eq. (7). Se impormos que o erro convirja assintoticamente para zero, independentemente de x e u , então os coeficientes deste termos na equação devem ser nulos e $\hat{A}$ deve ter autovalores com parte real negativa. Ou seja,

$$\hat{A} = A - KC \quad (8)$$

$$\hat{B} = B \quad (9)$$

Substituindo as Eqs. (8) e 9 na Eq. (5) a dinâmica do vetor $\hat{x}$ pode ser reescrita como:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \quad (10)$$

Seja

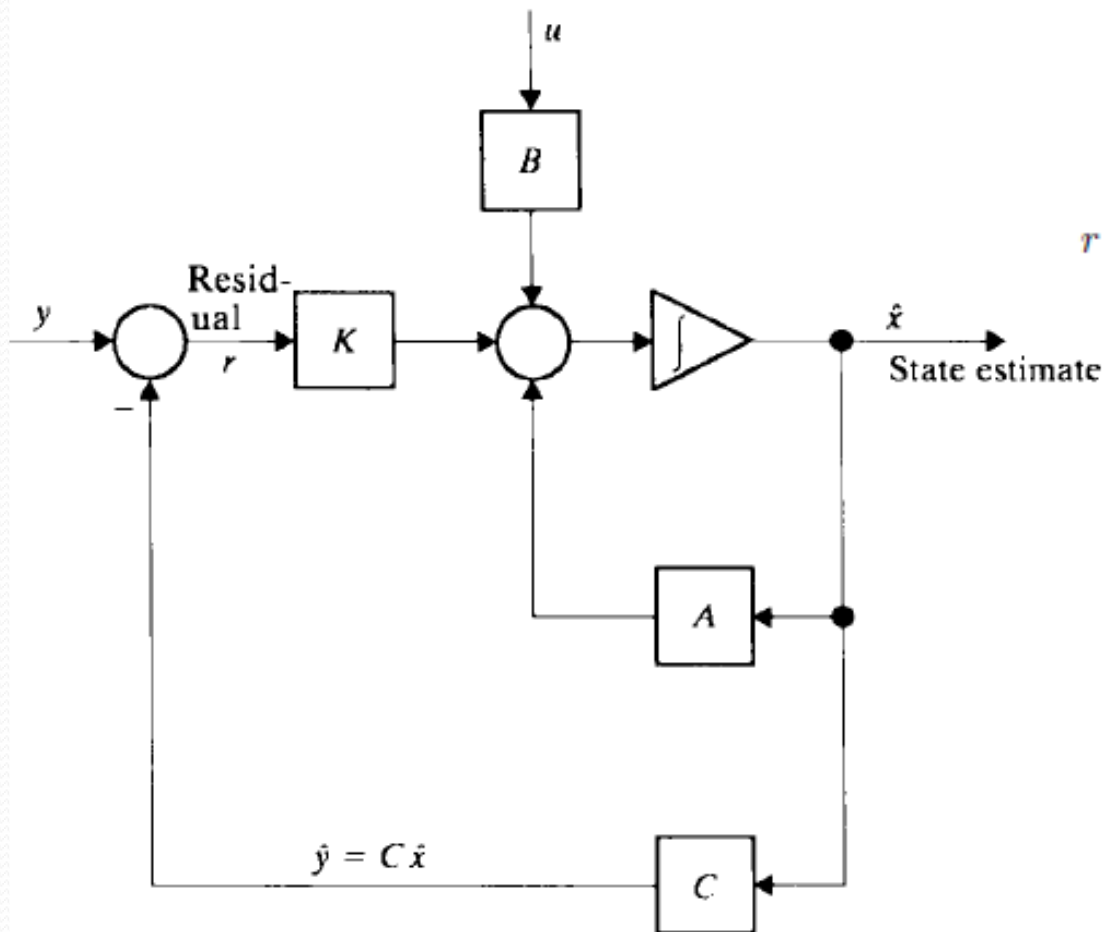
$$r = y - C\hat{x} = C(x - \hat{x}) = Ce$$

A variável r é chamado de resíduo e é a diferença entre o valor medido e a sua estimativa.

OBSERVADOR DE LUENBERGER

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

$$r = y - C\hat{x} = C(x - \hat{x}) = Ce$$



OBSERVADOR DE LUENBERGER

Para projetar o observador, considere novamente a equação da dinâmica do erro, dada pela Eq. (7)

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = \hat{A}e + (A - KC - \hat{A})x + (B - \hat{B})u$$

Se $A - KC - \hat{A} = 0$ e $B - \hat{B} = 0$ tem-se:

$$\dot{e} = \hat{A}e = (A - KC)e \quad (11)$$

Ou seja, para que o erro convirja para zero é necessário que os auto-valores da matriz $\hat{A} = A - KC$ tenham a partes reais negativas. Observe que esta equação é igual a dinâmica do sistema com realimentação:

$$\dot{x} = (A - BG)x \quad (12)$$

Portanto, pode-se adotar o mesmo procedimento do projeto de controle por alocação de polos (determinação da matriz G) para o projeto do observador (determinação da matriz K).

Lembrar que para o projeto do observador há que se verificar se o sistema é observável.

OBSERVADOR DE LUENBERGER

Exemplo

Considere a equação de estado de um sistema com os seguintes parâmetros:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]$$

Pede-se

- a) os auto-valores da matriz A ;
- b) verificar a controlabilidade e observabilidade do sistema;
- c) projetar um observador de estado;

$$A_c = A - KC$$

Matriz K

$$K \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

$$A_c = A - KC = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -4 - k_2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A_c] = \begin{bmatrix} s + k_1 & -1 \\ 4 + k_2 & s + 3 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A_c| = s^2 + (3 + k_1)s + 3k_1 + 4 + k_2 = 0$$



Os autovalores da matriz A são $s_{1,2} = -1.5 \pm 1.323j$

Escolha dos pólos de A_c

A parte real dos pólos de A_c devem estar afastados dos pólos de A para que a sua resposta seja mais rápida.

Pode-se selecionar, por exemplo, $s_{1,2} = -15$

$$|sI - A_c| = s^2 + (3 + k_1)s + 3k_1 + 4 + k_2 = 0 = s^2 + 30s + 225$$

$$k_1 = 27 \quad \text{e} \quad k_2 = 140$$

OBSERVADOR DE LUENBERGER COM VARIÁVEIS EXÓGENAS

OBSERVADOR DE LUENBERGER (Com variáveis exógenas)

Foi visto que quando há sinais externos como mudança de referência e perturbações é conveniente considerar a dinâmica do erro do sistema que é dada por:

$$\dot{e} = Ae + Bu + Ex_0 \quad (13)$$

onde

$$e = x - \hat{x}; \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_d \\ x_r \end{bmatrix} \quad (14)$$

Também será admitido que:

$$\dot{x}_0 = A_0 x_0 \quad (15)$$

Combinando as Eqs (13 e (15) pode-se definir o seguinte sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (16)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & A_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

OBSERVADOR DE LUENBERGER (Com variáveis exógenas)

Também foi admitido que a equação de saída

$$y = Ce \quad (18)$$

tende a zero mesmo que as variáveis externas não se anulem.

A lei de controle admitida foi:

$$u = -Ge - G_0x_0 \quad (19)$$

onde $G_0 = [G_d \quad G_r]$

A equação de saída é dada por:

$$y = Ce + Dx_0 = Cx \quad (20)$$

onde $C = [C \quad D]$

Substituindo na equação geral do observador (10) as Eqs. (16) e (20) tem-se

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \quad (21)$$

A Eq. 21 pode ser dividida em:

$$\dot{\hat{e}} = A\hat{e} + Bu + E\hat{x}_0 + K_e(y - C\hat{e} - D\hat{x}_0) \quad (22)$$

$$\dot{\hat{x}_0} = A_0\hat{x}_0 + K_0(y - C\hat{e} - D\hat{x}_0) \quad (23)$$

OBSERVADOR DE LUENBERGER (Com variáveis exógenas)

Também foi admitido que a equação de saída

$$y = Ce \quad (18)$$

tende a zero mesmo que as variáveis externas não se anulem.

A lei de controle admitida foi:

$$u = -Ge - G_0x_0 \quad (19)$$

onde $G_0 = [G_d \quad G_r]$

A equação de saída é dada por:

$$y = Ce + Dx_0 = Cx \quad (20)$$

onde $C = [C \quad D]$

Substituindo na equação geral do observador (10) as Eqs. (16) e (20) tem-se

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \quad (21)$$

PNV 5856 METODOLOGIA DE CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS A

OBSERVADOR DE LUENBERGER

(Com variáveis exógenas)



$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \quad (21)$$

A Eq. 21 pode ser dividida em:

$$\dot{\hat{e}} = A\hat{e} + Bu + E\hat{x}_0 + K_e(y - C\hat{e} - D\hat{x}_0) \quad (22)$$

$$\dot{\hat{x}}_0 = A_0\hat{x}_0 + K_0(y - C\hat{e} - D\hat{x}_0) \quad (23)$$

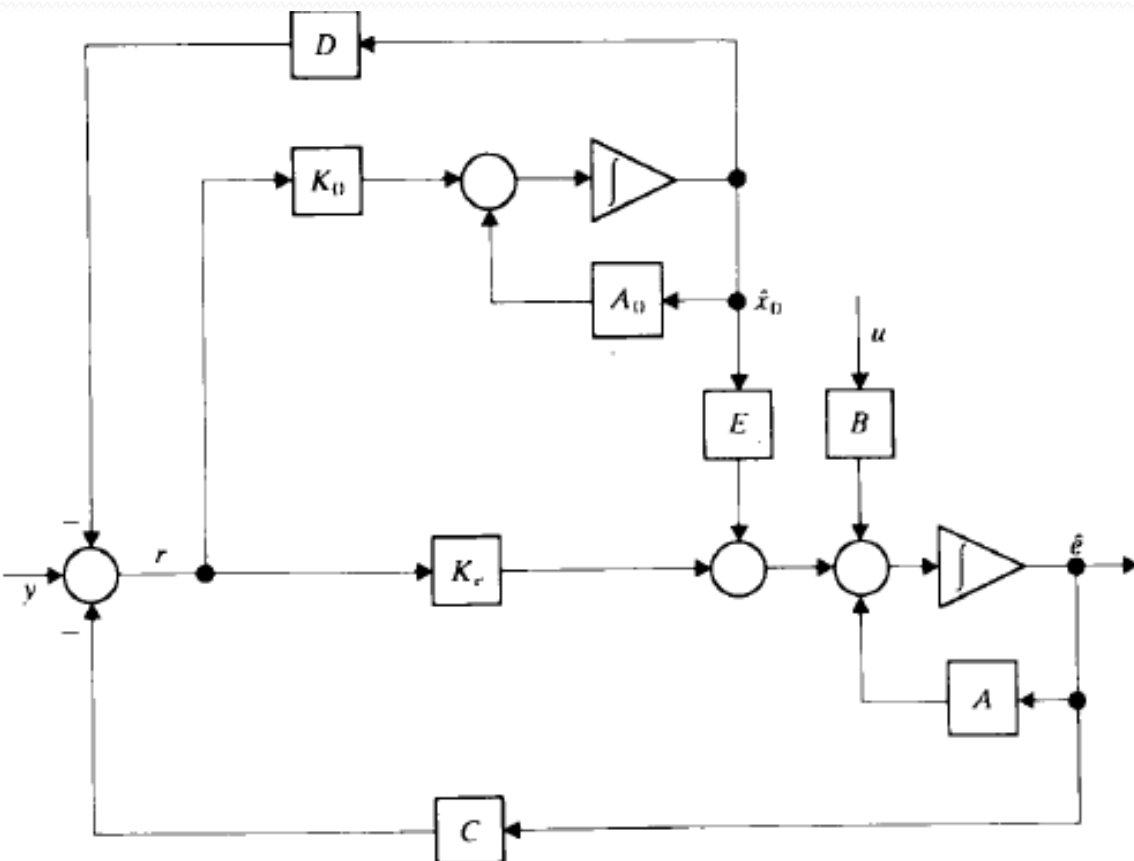
A matriz da equação de estado para malha fechada é dada por:

$$\hat{A} = A - KC = \begin{bmatrix} A - K_e C & E - K_e D \\ -K_0 C & A_0 - K_0 D \end{bmatrix} \quad (24)$$

Os pólos da matriz $\hat{A}$ podem ser alocados arbitrariamente se o posto da matriz de observabilidade N for igual a $k + v$, onde v é o número de componentes do vetor exógeno. A matriz N é obtida como:

$$N = \begin{bmatrix} C' & A'C' & \dots & \dots & (A^{-1})^{k+v+1}C' \end{bmatrix}$$

OBSERVADOR DE LUENBERGER (Com variáveis exógenas)



$$\dot{\hat{e}} = A\hat{e} + Bu + E\hat{x}_0 + K_e(y - C\hat{e} - D\hat{x}_0)$$

$$\dot{\hat{x}}_0 = A_0\hat{x}_0 + K_0(y - C\hat{e} - D\hat{x}_0)$$

Figure 7.4 Block diagram of observer including estimation of exogenous vector.

OBSERVADOR DE LUENBERGER (Com variáveis exógenas)

A notable feature of the observer of Fig. 7.4 is that there is no feedback from the estimate of the system error $\hat{e}$ to the estimate of the exogenous state $\hat{x}_0$. The entire structure of the portion of the observer that estimates $\hat{x}_0$ is in parallel with the gain K_e . We shall see in the next chapter that when x_0 is not directly measurable, the estimate $\hat{x}_0$ is used in place of x_0 . This means only that the input to $\hat{e}$ contains another term $G_0\hat{x}_0$ in addition to the term $E\hat{x}_0$ already shown in Fig. 7.4, but there is still no feedback from $\hat{e}$ to $\hat{x}_0$. Thus, if x_0 is a constant (i.e., $A_0 = 0$) and it does not appear in the measurement, then all that is left in the observer of x_0 is the path through K_0 , as shown in Fig. 7.4, which is a bank of integrators, one for each component of $\hat{x}_0$, in parallel with the path through K_e . This means that in the determination of the error $\hat{e}$ there is a path proportional to the *integral* of the residual $r = y - C\hat{e}$ in addition to the path through K_e which is proportional to the residual itself. Because of the integral path, it is possible for the residual r to become zero without $\hat{x}_0$ going to zero, and a control signal based on $\hat{x}_0$ (instead of x_0 , which we are assuming is not measurable) will also not go to zero. Thus it is possible to produce a constant control signal even when the system error can be driven to zero. The presence of a constant control signal in the absence of system error is a characteristic of a type 1 (or higher type) system which, in classical control system design is achieved by means of integral control, and is achieved automatically by the use of an observer to estimate the unmeasurable exogenous state vector x_0 .

OBSERVADOR DE LUENBERGER (Com variáveis exógenas)

Para projetar o observador (determinar K_e e K_0) admite-se que a estimativa do erro é dada por:

$$\hat{e} = \tilde{e} + V \hat{x}_0 \quad (25)$$

onde $\tilde{e}$ é o erro do observador para o processo sem o termo exógeno ($x_0 = 0$)

$$\dot{\tilde{e}} = A\tilde{e} + Bu + \tilde{K}(y - C\tilde{e}) \quad (26)$$

Considere agora as Eqs (25) e (26) e as Eqs (22) e (23) reproduzidas abaixo:

$$\dot{\hat{e}} = A\hat{e} + Bu + E\hat{x}_0 + K_e(y - C\hat{e} - D\hat{x}_0)$$

$$\dot{\hat{x}}_0 = A_0\hat{x}_0 + K_0(y - C\hat{e} - D\hat{x}_0)$$

OBSERVADOR DE LUENBERGER (Com variáveis exógenas)

Considerando estas 4 equações pode-se chegar às seguintes relações:

$$\tilde{K} + VK_0 = K_e \quad (27)$$

$$VA_0 - (A - \tilde{K}C)V = E - \tilde{K}D \quad (28)$$

ou se $A_0 = 0$

$$V = -(A - \tilde{K}C)^{-1}(E - \tilde{K}D) \quad (29)$$

$$\dot{\hat{x}}_0 = [A_0 - K_0(CV + D)]\hat{x}_0 + K_0(y - C\tilde{e}) \quad (30)$$

O observador pode ser projetado através das seguintes etapas:

- selecionar o ganho $\tilde{K}$ considerando que $x_0 = 0$
- Obter V através da Eq. (28) ou (29)
- Obter K_0 através da Eq. (30)
- Obter K_e através da Eq. (27)

OBSERVADOR DE LUENBERGER DE ORDEM REDUZIDA

Considere as seguintes equações do espaço de estado:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (45)$$

$$y = Cx \quad (46)$$

onde $x \in \mathbb{R}^k$, $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times m}$

Até agora, no controle por realimentação de estado, foi admitido que $y \in \mathbb{R}^k$. Neste caso o vetor de estado pode ser facilmente obtido através de

$$x = C^{-1}y \quad (47)$$

Mas, em geral isto não ocorre pois a ordem l do vetor de saída y é menor do que k . É razoável supor que, neste caso, não é necessário estimar todo o vetor de estado como foi efetuado anteriormente. O razoável é estimar os $k - l$ estados não observados diretamente por um sensor. Para isto, efetua-se um particionamento do vetor de estado e da matriz A como:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Desta forma tem-se:

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \quad (49)$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \quad (50)$$

O vetor de saída é dada por:

$$y = C_1 x_1 \quad (51)$$

Para o vetor x_1 não é necessário a sua estimação pois ele pode ser obtido por:

$$\hat{x}_1 = x_1 = C_1^{-1} y \quad (52)$$

O vetor x_2 pode ser estimado como:

$$\dot{\hat{x}}_2 = A_{21} C_1^{-1} y + A_{22} \hat{x}_2 + B_2 u \quad (53)$$

Para estimar x_2 adota-se a seguinte relação:

$$\hat{x}_2 = L y + z \quad (54)$$

onde $z \in \mathbb{R}^{k-l}$

$$\dot{z} = F z + \tilde{G} y + H u \quad (55)$$

O erro de estimação é dado por:

$$e = x - \hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Mas como o vetor x_1 é observado diretamente, o erro $e_1 = 0$. A dinâmica do erro e_2 , pode ser expressa como:

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\hat{x}}_2 \quad (57)$$

Substituindo na Eq. (57) as Eqs (50), (53), (54) e (55) obtem-se:

$$\dot{e}_2 = Fe_2 + (A_{21} - LC_1A_{11} - \bar{G}C_1 + FLC_1)x_1 \quad (58)$$

$$= +(A_{22} - LC_1A_{12} - F)x_2 + (B_2 - LC_1B_1 - H)u \quad (59)$$

$$\dot{e}_2 = Fe_2 + (A_{21} - LC_1A_{11} - \bar{G}C_1 + FLC_1)x_1 \quad (58)$$

$$= +(A_{22} - LC_1A_{12} - F)x_2 + (B_2 - LC_1B_1 - H)u \quad (59)$$

Para que o erro seja independente de x_1 , x_2 e u , as matrizes que multiplicam estas variáveis necessitam serem nulas, isto é,

$$F = A_{22} - LC_1A_{12} \quad (60)$$

$$H = B_2 - LC_1B_1 \quad (61)$$

$$\bar{G}C_1 = A_{21} - LC_1A_{11} + FLC_1 \quad (62)$$

Desta forma, a Eq. (59) torna-se:

$$\dot{e}_2 = Fe_2 \quad (63)$$

$$F = A_{22} - LC_1 A_{12} \quad (60)$$

$$H = B_2 - LC_1 B_1 \quad (61)$$

$$\bar{G}C_1 = A_{21} - LC_1 A_{11} + FLC_1 \quad (62)$$

$$\dot{e}_2 = F e_2 \quad (63)$$

As etapas para projetar o observador são:

- Selecionar L de tal que a matriz F definida pela Eq. (60) tenha os autovalores desejados;
- Determinar a matriz H através da Eq. (61);
- Determinar a matriz $\bar{G}$ através da Eq. (62)

Substituindo $\bar{G}$ na Eq. (55) obtem-se

$$\dot{z} = F\hat{x}_2 + (A_{21} - LC_1 A_{11})C_1^{-1}y + Hu \quad (64)$$

As Eqs. (52), (54) e (64) definem o observador de ordem reduzida.

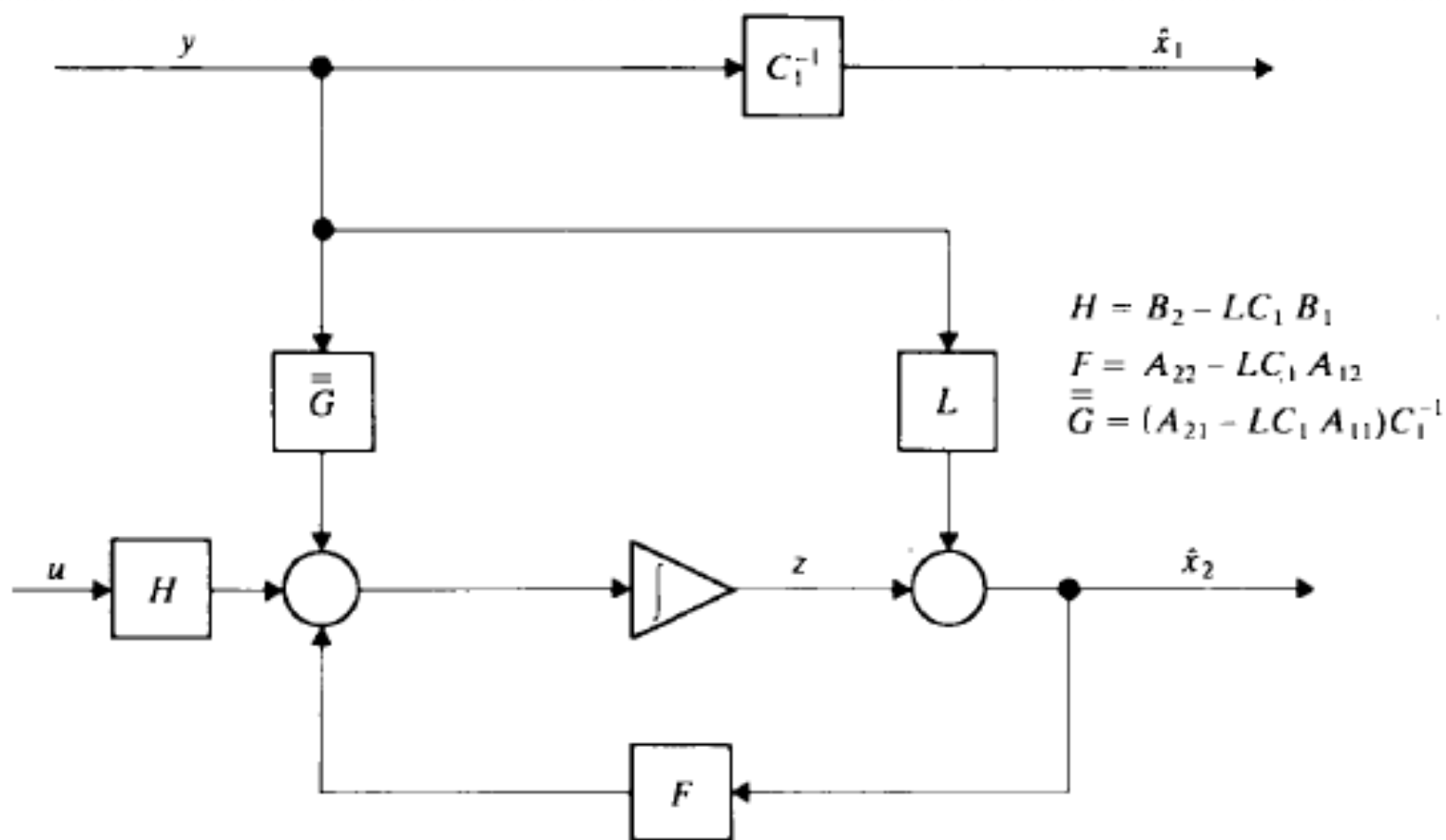


Figure 7.8 Reduced-order observer for observation $y = C_1 x_1$ with C_1 nonsingular.