EX. 195 i) Seja $x_n \to x$, temos $\|x_n^* - x^*\| = \|(x_n - x)^*\| = \|x_n - x\| \to 0$, logo $x_n^* \to x^*$.

ii) Em toda $*$-álgebra: $1 = (1^*)^* = (1^* 1)^* = 1^* 1 = 1^*$, então numa $C^*$-álgebra: $\|1\| = \|1^* 1\| = \|1\|^2 \Rightarrow \|1\| = 1$ (se for nulo, a álgebra seria nula).

. Não foi usada a minimalidade de $M_b(M;\mathbb{C})$! comutatividade é herdada!

EX. 202 Pelo Exercício 66, é suficiente mostrar que $M_b(M;\mathbb{C})$ é uma $*$-subálgebra fechada de $\mathcal{F}_b(M;\mathbb{C})$. Note que a função constante $1$ é a unidade de todas as álgebras envolvidas. Seja $(f_n) \subset M_b(M;\mathbb{C})$ tal que $f_n \to f$, seja $x \in M$, temos que $\|f_n(x) - f(x)\| = \|(f_n - f)(x)\| \le \|f_n - f\|_\infty \to 0$, logo $f_n \to f$ pontualmente $\Rightarrow f \in M_b(M;\mathbb{C})$, como queríamos mostrar. A afirmação sobre $C_b(M;\mathbb{C})$ é consequência do Teorema de Aproximação de funções contínuas por funções simples.

→ no sentido da ordem!

EX. 204 ($\Rightarrow$) Seja $(g_n) \subset M_b(M,\mathbb{C})^+$ como na Definição 203. Dados $n \in \mathbb{N}$ e $p \in M$, temos $|f_n(p)| \le |f_n(p) - f(p)| + |f(p)| \le g_1(p) + |f|_\infty \le |g_1|_\infty + |f|_\infty$, logo $(f_n)$ é limitada. Além disso, seja $\varepsilon > 0$, como a função constante $\varepsilon$ não cota inferior de $(g_n)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g_{n_0} < \varepsilon \Rightarrow |f_{n_0}(p) - f(p)| \le g_{n_0}(p) < \varepsilon$, logo $f_n(p) \to f(p)$, i.e., temos convergência pontual.

($\Leftarrow$) ERROR! considere a função $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$.

EX. 208 i) A associatividade de $\tilde{\mathcal{A}}$ é clara. Seja $((\alpha_n, A_n)) \subset \tilde{\mathcal{A}}$ de Cauchy, seja $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall m,n \ge n_0$: $\|(\alpha_n, A_n) - (\alpha_m, A_m)\| = \|(\alpha_n - \alpha_m, A_n - A_m)\| < \varepsilon \Rightarrow |\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$, logo $(\alpha_n)$ é Cauchy e converge para um $\alpha \in \mathbb{C}$. Dado $A \in \mathcal{A}$, $A \neq 0$, considere $L_A$ (resp. $R_A$), como a função $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dada por $L_A(B) = AB$ (resp. $R_A(B) = BA$), temos que $\left\|L_A\left(\frac{A^*}{\|A\|}\right)\right\| = \frac{\|AA^*\|}{\|A\|} = \frac{\|A\|^2}{\|A\|} = \|A\|$, logo $\|L_A\| = \|A\|$, similarmente $\|R_A\| = \|A\|$. Assim, temos que $\|A_n - A_m\| = \|L_{A_n - A_m}\| = \sup_{\|B\|=1} \|(A_n - A_m)B\| \le \|(0, A_n - A_m)\| \le \|(\alpha_n - \alpha_m, A_n - A_m)\| < \varepsilon$ logo $(A_n) \subset \mathcal{A}$ é Cauchy e converge para um $A \in \mathcal{A}$. Por tanto $\|(\alpha_n, A_n) - (\alpha, A)\| = \|(\alpha_n - \alpha, A_n - A)\| < \varepsilon$, segue que $(\alpha_n, A_n) \to (\alpha, A)$. Logo $\tilde{\mathcal{A}}$ é completo.

ii) $\|(0, A)\| = \|L_A\| = \|R_A\| = \|A\|$ e $\|(\alpha, 0)\| = |\alpha|$.

iii) Pela observação após do Exercício 48, $\mathcal{A}$ é um $*$-ideal de $\tilde{\mathcal{A}}$, e é fechado pois é um subespaço completo.

EX. 209 $\sup_{\|B\|=1} \|\alpha B + AB\| = \|\alpha Id_{\mathcal{A}} + R_A\| = \|\alpha Id_{\mathcal{A}} + L_A\| = \sup_{\|B\|=1} \|\alpha B + BA\|$.

LEMA 212. i) Sejam $B$ e $C$ duas inversas de $A$, temos $B = B(AC) = (BA)C = C$

ii) É só usar indução.

iii) $A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = 1^* = 1$, veja ex. 195.

**LEMA 215.** i) assumindo $A$ com unidade; $\lambda 1 - A^*$ é invertível $\Leftrightarrow (\lambda 1 - A^*)^* = \bar{\lambda} 1 - A$ é invertível.

ii) Temos $0 \notin \sigma(A)$ e $0 \notin \sigma(A^{-1})$. Além disso, $\lambda 1 - A^{-1}$ é invertível $\Leftrightarrow \lambda^{-1} A(\lambda 1 - A^{-1})$ é invertível $\Leftrightarrow$ $A - \lambda A^{-1}$ invertível $\Leftrightarrow \lambda \notin \sigma(A)^{-1}$.

$\Leftrightarrow \lambda \notin \sigma(A^{-1})$

iii) Assumiremos $A$ com unidade. Seja $H = (\lambda 1 - AB)^{-1}$, temos $\lambda H - ABH = 1 \Rightarrow \lambda H - 1 = ABH \Rightarrow$ $\lambda A^{-1} H - A^{-1} = BH \Rightarrow \lambda A^{-1} H A - 1 = BHA \Rightarrow (\lambda 1 - BA)(BHA + 1) = (\lambda 1 - BA)\lambda A^{-1} HA$, note que $A^{-1}H =$ $[(\lambda 1 - AB)A]^{-1} = [\lambda A - ABA]^{-1} = [A(\lambda 1 - BA)]^{-1} = (\lambda 1 - BA)^{-1} A^{-1}$, o que claramente implica a identidade na dica. Agora, suponha $\lambda \neq 0$, temos $\lambda 1 - AB$ é invertível $\Leftrightarrow \lambda 1 - BA$ é invertível.

**LEMA 218** Seja $T_K = \sum_{m=1}^{K} (BA^{-1})^m$, pela hipóteses $\sum_{m=1}^{\infty} \|BA^{-1}\|^m$ é convergente, logo $\sum_{m=1}^{\infty} (BA^{-1})^m$ é absolutamente convergente, logo é convergente $(T_K \to T)$ pois $A$ é Banach, note que $TBA^{-1} = \lim T_K BA^{-1} = BA^{-1}T = \lim BA^{-1} T_K =$ $\lim T_{K+1} - BA^{-1} = T - BA^{-1} \Rightarrow TB = TA - B \Rightarrow TB + A - TA = A - B$. Multiplicando por $A^{-1} + A^{-1}T$, temos $(A-B)(A^{-1} + A^{-1}T) = TBA^{-1} + T\underbrace{BA^{-1}T} + 1 + \cancel{T} - \cancel{T} - T^2 = T - BA^{-1} + T(T - BA^{-1}) + 1 - T^2 =$ $\cancel{T - BA^{-1}} - \cancel{TBA^{-1}} + 1 = 1$, logo $(A-B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}T$.

**COR. 219** Se $\lambda \in R(A)$, seja $0 < r < \|(\lambda 1 - A)^{-1}\|^{-1}$, temos $\|(r 1)(\lambda 1 - A)^{-1}\| = r\|(\lambda 1 - A)^{-1}\| < 1$, então pelo lema anterior: $\lambda 1 - A + r1 = (\lambda + r).1 - A$ é invertível, logo $\lambda + r \in R(A)$. Isso prova que $R(A)$ é aberto $\Rightarrow \sigma(A)$ é fechado. Se $|\alpha| > \|A\|$, temos $\|\alpha^{-1} A\| = \|A(\alpha 1)^{-1}\| < 1 \Rightarrow$ pelo lema anterior $\alpha 1 - A$ é invertível $\Rightarrow \alpha \in R(A)$, segue que $\sigma(A)$ é limitado e, por tanto, compacto

**EX. 224** É suficiente mostrar que $\sum_{m=0}^{\infty} (BA^{-1})^m$ é convergente, seguindo o Exercício 218. Note que existe $K \in \mathbb{N}$ tq $\|(BA^{-1})^K\| < 1$, escreva $m = Kq_m + r$, com $0 \leq r < K$. Seja $M = \max\{\|BA^{-1}\|^r, 0 \leq r < K\}$. Temos que $\|(BA^{-1})^m\| \leq \|(BA^{-1})^K\|^{q_m} M$, note que a série $\sum_{q=1}^{\infty} \|(BA^{-1})^K\|^q$ é convergente $\Rightarrow$ pelo critério de comparação e a completude de $A$, obtemos o resultado desejado

**EX. 251** i) Segue do Corolário 159. ii) $\rho(A) = \underbrace{\rho(\mathrm{Re}\{A\})}_{\in \mathbb{R}} + i\underbrace{\rho(\mathrm{Im}\{A\})}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow \rho(\mathrm{Im}\{A\}) = 0$ então, por i): $\mathrm{Im}\{A\} = 0$.

**EX. 253** Seja $(f_n) \subset M_b(M; \mathbb{C})$ tal que $f_n \to f$ pontualmente, temos que $\mu_p(f_n) = f_n(p)$ $\longrightarrow f(p) = \mu_p(f)$, logo, pelo lema 205, $\mu$ é uma medida, pois é uma integral positiva. Além disso, $\mu_p(1) = 1$, logo $\mu_p$ é normalizado

**PROP. 264** i) ($\Rightarrow$) É consequência direta do Lema 262 ii) no caso A seja unital. Em geral, note que, se $\tilde{p} \in E(\tilde{A})$: $\tilde{p}(a, x) = a.1 + p(x)$, com $p = \tilde{p}|A$, veja $\tilde{p}$ é positivo se e somente $p$ é positivo. ($\Leftarrow$) Trivial. além disso $\|\tilde{p}(0,x)\| = \|p(x)\|$

ii) No caso unital, pela Proposição 225, dado $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $|\lambda| = r_A(A)$, temos que $|\lambda| = \|A\|$. O resultado segue do Lema 262 ii). O caso unital é similar ao item anterior.

**EX. 267** A primeira condição é trivial. Fixando $n \in \mathbb{N}$, escreva $R = |(\varphi - \varphi'')(x_n)|$, $P = |(\varphi - \varphi')(x_n)|$, $Q = |(\varphi' - \varphi'')(x_n)|$, pela desigualdade triangular em $\mathbb{C}$: $R \leq P + Q$, temos que $\frac{1}{1+P} + \frac{1}{1+Q} = \frac{2+Q+P}{1+P+Q+QP}{}^{+1-1}$

$= \frac{1-PQ}{1+P+Q+PQ} + 1 \leq \frac{1}{1+R} + 1 \Rightarrow 2 - \left(\frac{1}{1+R} + 1\right) \leq \left(1 - \frac{1}{1+P}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+Q}\right) \Rightarrow \frac{R}{1+R} \leq \frac{P}{1+P} + \frac{Q}{1+Q}$, o que implica a desigualdade triangular para $d_S$.

**EX. 268** Se $d_S(\varphi, \varphi') = 0 = \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^{-n} |\varphi(x_n) - \varphi'(x_n)|}{1 + |\varphi(x_n) - \varphi'(x_n)|} \Rightarrow \varphi(x_n) = \varphi'(x_n), \forall x_n \in X$, o resultado segue da densidade de $\{x_n\}$

**EX. 269** Se $(\varphi_n) \subset \Omega$ tq $\varphi_n \to \varphi$ (com respeito a $d_S$) $\Rightarrow d(\varphi_n, \varphi) \to 0$, sejam $x \in X$ e $\{y_k\} \subset \{x_n\}$ tq $y_k \to x$, temos que $\forall k, n \in \mathbb{N}$: $\frac{|\varphi_n(y_k) - \varphi(y_k)|}{1 + |\varphi_n(y_k) - \varphi(y_k)|} \leq \frac{d(\varphi_n, \varphi)}{2^n} \to 0$

tomando limite em $k$ e logo em $n$, temos que $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$. Agora, suponha que $(\varphi_n) \subset \Omega$ tq $\varphi_n(x) \to \varphi(x), \forall x \in X$. . . . HELP!

**EX. 272.** ($\Leftarrow$) Prova análoga ao caso $H = \mathbb{R}^n$. ($\Rightarrow$) Suponha que $H$ é separável, então é claro que possui uma base numerável ortonormal $(e_n) \subset H$. Podemos construir a isometria $\ell_\infty \hookrightarrow B(H)$, $(a_n) \mapsto T$ tq $T(e_n) = a_n e_n$, onde $\ell_\infty$ é o conjunto das sequências limitadas sobre $\mathbb{K}$. É suficiente mostrar que $\ell_\infty$ não é separável, o que é verdade pois, definindo $e_I = \begin{cases} 1, & i \in I \\ 0, & i \notin I \end{cases}$, com $I \in 2^{\mathbb{N}}$, temos que $\{B(e_I, \frac{1}{2})\}_{I \subset \mathbb{N}}$ é um conjunto não numerável de bolas abertas. (com $\|\cdot\|_{sup}$) raio!