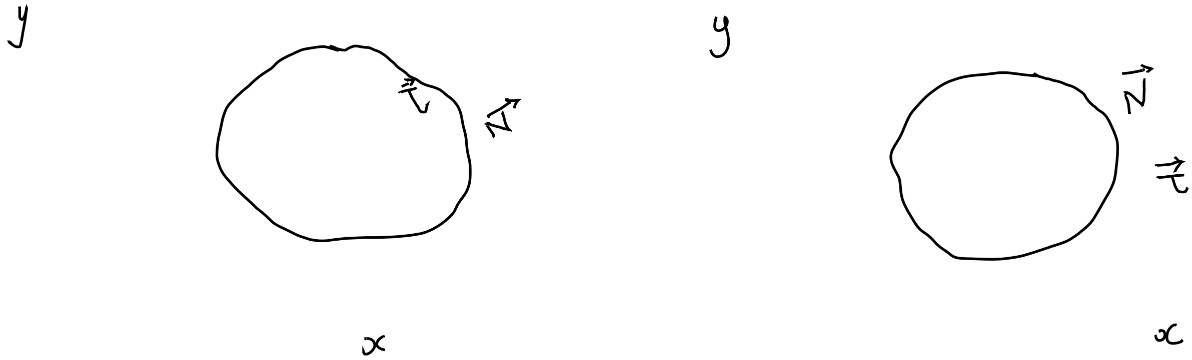
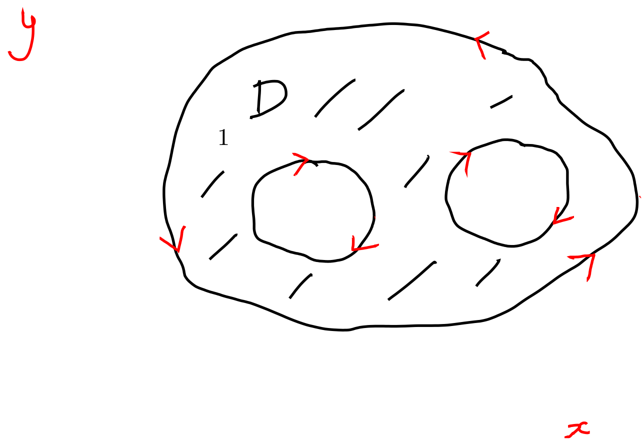
1. Orientação induzida no bordo

Dada uma curva fechada lisa fechada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ podemos orientar o seu traço de duas maneiras distintas: no **sentido horário** e no **sentido antihorário**. No caso antihorário, os vetores normal exterior $\vec{N}(P)$ e tangente unitária no sentido escolhido $\vec{\tau}(P)$, formam uma base positiva em $\mathbb{R}^2$ e no caso horário, uma base negativa em $\mathbb{R}^2$.



Suponhamos agora que $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio cujo bordo (ou fronteira) ∂D é formado por um número finito de curvas lisas $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_n$. Dizemos que a curva γ_i, tem a **orientação induzida** por D se em cada ponto $P \in \gamma_i \partial D$, a normal exterior a D, $\vec{N}(P)$ e a tangente unitária a γ_i no sentido escolhido $\vec{\tau}(P)$ formam uma base positiva em $\mathbb{R}^2$.

Dizemos que o bordo ∂D tem a orientação induzida por D, se todas as curvas γ_i, $1 \le i \le n$ tiverem a orientação induzida por D,



Date: November 13, 2023.

Intuitivamente, a orientação induzida é tal que, percorrendo cada curva do bordo no sentido dado, o domínio D fica à esquerda.

2. Teorema de Green - caso geral

Teorema 2.1. *(Teorema de Green - caso geral) Seja R uma região em $\mathbb{R}^2$, cuja fronteira (ou bordo) é formada por um número finito de curvas lisas por partes $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_n$, com a orientação induzida por D.*

Se $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ é um campo de classe $\mathcal{C}^1$ em um aberto contendo $R \cup \partial R$, então

$$\begin{aligned}\oint_{\partial R} P\,d\,x + Q\,d\,y &= \oint_{\gamma_1} P\,d\,x + Q\,d\,y + \oint_{\gamma_2} P\,d\,x + Q\,d\,y + \cdots + \oint_{\gamma_n} P\,d\,x \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\,x\,d\,y.\end{aligned}$$

Observação 2.2. *A igualdade do teorema, escrita na forma vetorial fica:*

$$\oint_{\partial R} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \iint_R \vec{rot}\vec{F} \cdot \vec{k}.$$

Exemplo 2.3. *Seja $\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}$ (o campo "$d\,\theta$".) Calcule a integral de linha $\int_C F\,d\,r$ na curva C nos casos abaixo.*

1. *C é a circunferência de raio $a > 0$ centrada na origem, percorrida no sentido horário.*
2. *C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4x - 3$.*
3. *C é a elipse $\frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.*
4. *C é uma curva qualquer ligando os pontos $(2,0)$ a $(0,2)$, contida no primeiro quadrante.*