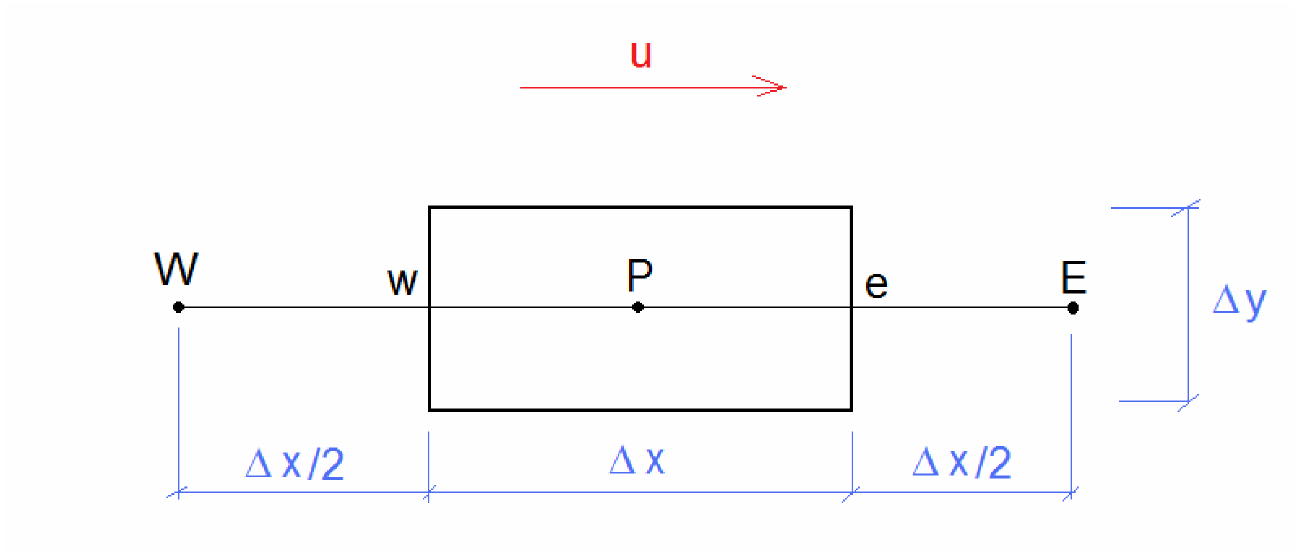
PME 2556 – Dinâmica dos Fluidos Computacional

Aula 13 – Escoamento Compressível

Para um problema unidimensional, considerando escoamento positivo na direção x:



A equação da continuidade:

$$\int_{\forall C} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\forall + \int_{SC} \rho \vec{u}.\vec{n}\, dA = 0$$

Resulta:

$$\frac{\rho_P(t+\Delta t) - \rho_P(t)}{\Delta t} \Delta x \Delta y + \rho_e u_e \Delta y - \rho_w u_w \Delta y = 0$$

Podemos escrever, para uma iteração do algoritmo SIMPLE:

$$\rho_P(t+\Delta t) = \rho_P^* + \rho_P'$$

$$\rho_e u_e = \left(\rho_e^* + \rho_e'\right)\left(u_e^* + u_e'\right) = \rho_e^* u_e^* + \rho_e^* u_e' + \rho_e' u_e^* + \underbrace{\rho_e' u_e'}_{\cong 0}$$

$$\rho_w u_w = \left(\rho_w^* + \rho_w'\right)\left(u_w^* + u_w'\right) = \rho_w^* u_w^* + \rho_w^* u_w' + \rho_w' u_w^* + \underbrace{\rho_w' u_w'}_{\cong 0}$$

Substituindo na equação da continuidade:

$$\underbrace{\frac{\rho_P^*(t+\Delta t) - \rho_P(t)}{\Delta t}\Delta x \Delta y + \rho_e^* u_e^* \Delta y - \rho_w^* u_w^* \Delta y}_{\dot{m}^*} + \frac{\rho_P'}{\Delta t}\Delta x \Delta y +$$

$$\rho_e^* u_e' \Delta y + \rho_e' u_e^* \Delta y - \rho_w^* u_w' \Delta y - \rho_w' u_w^* \Delta y = 0$$

As correções de velocidade se relacionam com as correções de pressão através de:

$$u_e' = d_e \,(p'_P - p'_E)$$

$$u_w' = d_w \,(p'_W - p'_P)$$

Substituindo na equação da continuidade:

$$\dot{m}^* + \frac{\rho'_P}{\Delta t}\Delta x \Delta y + \rho_e^* d_e \Delta y\left(p'_P - p'_E\right) +$$

$$\rho_w^* d_w \Delta y\left(p'_P - p'_W\right) + \rho'_e u_e^* \Delta y - \rho'_w u_w^* \Delta y = 0$$

As correções de densidade se relacionam com as correções de pressão através de uma equação de estado. Considerando gás ideal, e usando um esquema upwind:

$$\rho'_P = \frac{p'_P}{RT_P} \qquad \rho'_e = \rho'_P = \frac{p'_P}{RT_P} \qquad \rho'_w = \rho'_W = \frac{p'_W}{RT_W}$$

A equação da continuidade se transforma numa equação de correção de pressão:

$$p'_P \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t\, RT_P} + \rho^*_e d_e \Delta y \left(p'_P - p'_E\right) + \rho^*_w d_w \Delta y \left(p'_P - p'_W\right) + p'_P \frac{u^*_e \Delta y}{RT_P} - p'_w \frac{u^*_w \Delta y}{RT_W} = -\dot{m}^*$$

Agrupando os termos:

$$\left(\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t\, R T_P} + \rho_e^* d_e \Delta y + \rho_w^* d_w \Delta y + \frac{u_e^* \Delta y}{R T_P}\right) p'_P = \rho_e^* d_e \Delta y\, p'_E + \left(\rho_w^* d_w \Delta y + \frac{u_w^* \Delta y}{R T_W}\right) p'_w - \dot{m}^*$$

Temos um sistema linear:

$$a_P\, p'_P = \sum_{vizinhos} a_i\, p'_i + b$$

Condições de Contorno

Em escoamentos compressíveis, em saídas (outlets) se especifica uma pressão estática, mas em entradas especifica-se geralmente temperatura, direção do escoamento e uma pressão total dada por:

$$p_t = p\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{u^2}{\gamma RT}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\gamma = c_p / c_v$$

Bibliografia

Ferziger, J.H., Peric, M., “Computational Methods for Fluid Dynamics”, Springer-Verlag, 1996.

Versteeg, H,K; Malalasekera, W., “An introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method”, 2nd Edition, Pearson Education Limited, 2007.

Maliska, C.R., “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional, LTC editora, 1995.

Apsley, D., CFD Lecture Notes, University of Manchester, Spring 2007.

ANSYS CFX 14 Theory Guide, 2012.