Sequências, séries e limites

16, 21, 23/11/23

LIMITES DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Uma sequência numérica é uma ..., bem, uma sequência de números:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{R},$$

isto é, uma coleção infinita de números indexados pelos naturais 1, 2, ...

Exemplos: (i) A sequência de números naturais: 1, 2, 3, ...

(ii) Os números ímpares: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, ..., $a_n = 2n-1$, ...

(iii) A sequência de inversos dos naturais: $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$.

(iv) A sequência $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$

LIMITES

Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um número $a \in \mathbb{R}$, denotado por

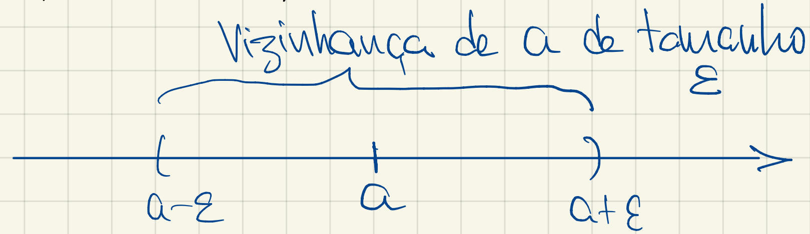
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{ou} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a,$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n \geq N$,

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Em português, isso quer dizer o seguinte: a_n converge para a se para qualquer distância $\varepsilon > 0$, por menor que seja, é sempre possível encontrar um momento N a partir do qual todos os pontos da sequência a_n, com $n \geq N$, estão ε-próximos de a, isto é,

$$\underbrace{|a_n - a|}_{\text{"distância" de } a_n \text{ a } a} < \varepsilon.$$



A partir de algum "instante" N, todos os elementos da sequência estão na vizinhança acima.

Exemplo 1: $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Prova: Dado qualquer $\varepsilon > 0$, queremos encontrar N tal que $|1/n - 0| < \varepsilon$.

Mas $|1/n - 0| = 1/n$ e $1/n < \varepsilon \iff n > 1/\varepsilon$. Isto é, tomando (qualquer) natural $N > 1/\varepsilon$, se $n \geq N$, então $1/n \leq 1/N < \varepsilon$.

Assim, se tomamos $\varepsilon = 0{,}001$, podemos tomar $N = 1001$:

$$n \geq N = 1001 \implies \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1001} < \frac{1}{1000} = 0{,}001$$ e portanto

$$\left| 1/n - 0 \right| = 1/n < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Observe que $N = 1001$ funciona, mas $N = 2000$ ou $N = 10^{23}$ também funcionam!

<u>Exemplo</u> 2: $$\alpha_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/3$$

<u>Prova</u>: Podemos ver isso diretamente(*). Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq N$

$$\left| \alpha_n - 1/3 \right| < \varepsilon.$$

(*) Veremos mais tarde outras maneiras de fazê-lo.

Mas

$$\left| \alpha_n - 1/3 \right| = \left| \left(1/3 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

e, portanto, precisamos encontrar N tal que, se $n \geq N$, então

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} < \varepsilon.$$

Como para todo natural n, $n^2 \geq n$, $1/6n^2 \leq 1/6n \leq 1/2n$.

Assim

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

e, portanto, se fizermos $n > 1/\varepsilon$, $1/n < \varepsilon$, o que implica que $1/2n + 1/6n^2 < \varepsilon$.

Concluímos então que podemos escolher qualquer $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$N > \frac{1}{\varepsilon}. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 3: A sequência $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ não converge.

Intuitivamente isso é claro: uma sequência converge para um número a se seus elementos chegam cada vez mais perto de a quando n cresce, mas a sequência acima fica pulando pra lá e pra cá o tempo todo. Mas como PROVAR isso?

Vamos reescrever o que quer dizer $\lim_{n\to\infty} a_n = a$:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N,\ |a_n - a| < \varepsilon.}$$

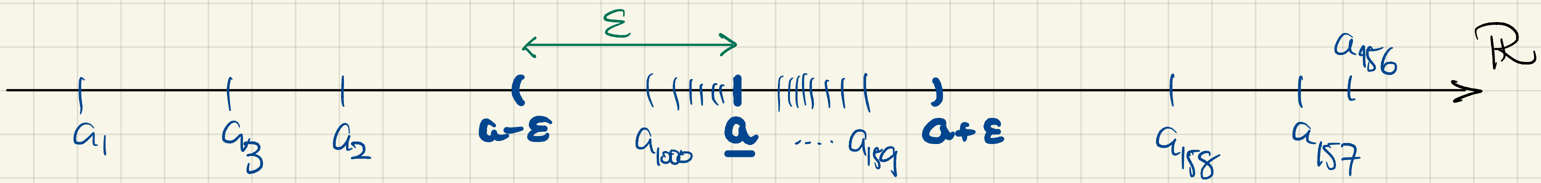
Negar essa afirmação pode ser feito mecanicamente, trocando os quantificadores $\underline{\underline{\forall}}$ e $\underline{\underline{\exists}}$ e trocando $\underline{\underline{\leq}}$ por $\underline{\underline{\geq}}$:

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N \text{ tal que } |a_n - a| \geq \varepsilon.}$$

Essa última afirmação é o que deve ser verificado se queremos mostrar que a_n NÃO CONVERGE para a. Em português, o que ela diz é que existe uma distância ($\exists \varepsilon > 0$) para a qual é sempre possível encontrar pontos a_n cuja distância a $\underline{a}$ é maior ou igual a ε, arbitrariamente "longe na sequência", isto é, não importa quão grande N seja, existe $n \geq N$ com a_n mais que ε-distante de $\underline{a}$.

Antes de voltar ao exemplo, vejamos figuras.

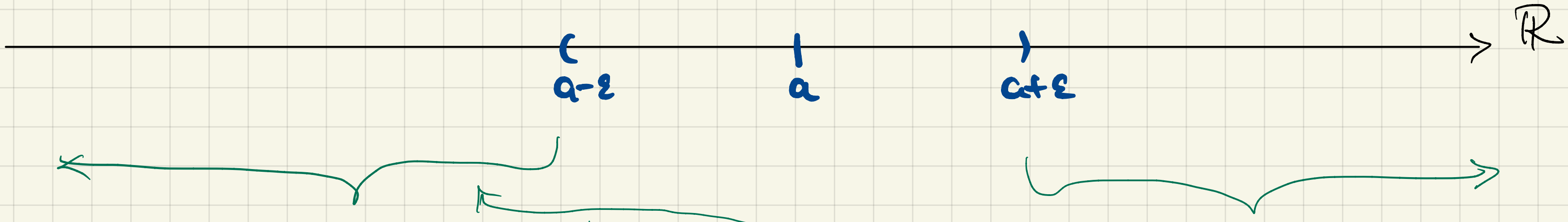
$$\boxed{a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a}$$



Todos os a_n estão ε-próximos de a, exceto um número finito deles, nesse caso $a_1, a_2, \dots, a_{158}$.

$$\boxed{a_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} a}$$

Negar o que está dito aqui é dizer que existe uma distância $\varepsilon>0$ para a qual existe um número infinito de elementos da sequência que não estão no intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$:



Há um número infinito de elementos da sequência aqui ou aqui.

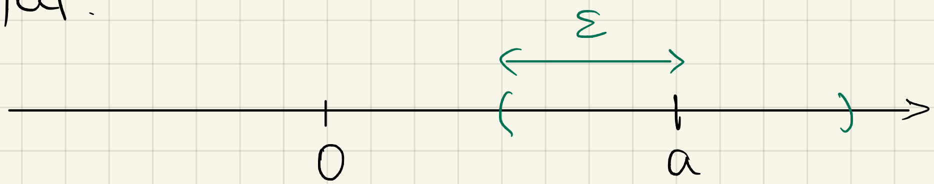
Vejamos como verificar isso no caso da sequência $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$, que também pode ser descrita como

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

<u>Teorema</u>: A sequência a_n acima não converge.

<u>Prova</u>: Temos que mostrar que, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, a_n não converge para a. Suponha primeiro que $a \neq 0$. Nesse caso, podemos escolher qualquer $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon < |a|$.

Assim, para todo n ímpar, $a_n = 0$, e portanto, se n é ímpar temos



$$|a_n - a| = |0 - a| = |a| > \varepsilon.$$ Isto é, $|a_{2k+1} - a| > \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

A outra possibilidade é $a = 0$. Nesse caso, tomamos $0 < \varepsilon < 1$ e, para todo n par, vale

$$|a_n - a| = |1 - 0| = 1 > 0.$$

Isso mostra que a_n não converge para nenhum $a \in \mathbb{R}$. ∎

Exercícios: (i) Mostre que a sequência $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

(ii) Mostre que a sequência $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ não converge.

(iii) Mostre que a sequência $\beta_n = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right)}{n^3}$ converge para $1/3$ quando $n \to \infty$.

Teorema: Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências numéricas e suponha que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B$$

Então:

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

(iv) se $B \neq 0$ então

$$\lim_{n\to\infty} a_n / b_n = A/B.$$

Obs: Note que um caso particular interessante acontece se a_n é constante, $a_n = a$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Neste caso (iii), por exemplo, se torna $\lim_{n\to\infty} (a \cdot b_n) = a \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$.

Prova: (i) Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar N tal que, $\forall n \geq N$

$$|(a_n + b_n) - (A - B)| < \varepsilon.$$

desigualdade triangular

Mas $$|(a_n+b_n) - (A+B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B|$$

Como $a_n \to A$ e $b_n \to B$, podemos escolher N_1 tal que $\forall n \geq N_1$, $|a_n - A| < \varepsilon/2$. Da mesma forma, tomamos N_2 tal que $\forall n \geq N_2$, $|b_n - B| < \varepsilon/2$. Agora, tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, temos, para $n \geq N$,

$$|(a_n+b_n) - (A+B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Obs: Escolhemos algumas coisas na "sequência lógica" acima que fazem a prova funcionar e ser "psicologicamente" agradável. Mas poderíamos, por exemplo, ter escolhido N_1 de forma que $|a_n - A| < \varepsilon/157$ se $n \geq N_1$ e ter tomado $N = N_1 + N_2$. Isso também garante que, se $n \geq N$,

$$|(a_n+b_n) - (A+B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon/157 + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Prova de (ii): Exercício.

Prova de (iii): Novamente, precisamos mostrar que $|a_n \cdot b_n - A \cdot B| < \varepsilon$ para todos $a_n \cdot b_n$ com n grande o bastante. Novamente, vejamos o que podemos fazer com $|a_n \cdot b_n - A \cdot B|$ para relacioná-lo com $|a_n - A|$ e $|b_n - B|$.

$$|a_n \cdot b_n - A \cdot B| = |a_n b_n - a_n B + a_n B - A \cdot B| \qquad (*)$$
$$\leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A|$$

Vamos usar o seguinte

Teorema: Uma sequência convergente é limitada (superior e inferiormente).

Prova: Suponha $x_n \longrightarrow X$ e escolha N tal que $|x_n - X| < 1$ se $n \geq N$. Isso quer dizer que a sequência está toda no intervalo $(X-1, X+1)$, exceto (possivelmente) os elementos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}$. Tomando

$$M = \max\{|X|+1, |x_1|, \dots, |x_{N-1}|\}$$

segue que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$-M \leq x_n \leq M \quad . \quad \square$$

Voltando à prova de (iii), como $a_n \to A$, existe M tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora escolhemos N tal que

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{157}M} \quad \text{e} \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{7} \cdot B}$$

Assim de (*) segue que

$$|a_n b_n - AB| \leq M \cdot |b_n - B| + B\,|a_n - A|$$

$$< \frac{\varepsilon}{\sqrt{157}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{7}} \leq \varepsilon.$$

<u>Exercício</u>: Prove (iv). Note que, como já provamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = A \cdot B$ e como $a_n/b_n = a_n \cdot (1/b_n)$, basta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}, \quad \text{desde que } B \neq 0.$$

Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \implies \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$; talvez ajude.

Exemplo: Se $a_n \to A$ então $a_n^k \to A^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$: isso segue da propriedade (iii). Se $A \neq 0$, então o mesmo vale $\forall k \in \mathbb{Z}$ (por (iv)).

Portanto

- $$\frac{1}{n^k} \to 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

- $$\frac{1}{3n^2 - 2n + 5} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$ Isso porque

$$\frac{1}{3n^2 - 2n + 5} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{3 - 2/n + 5/n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pelo que vimos acima.

$$3 - 2/n + 5/n^2 \longrightarrow 3 \quad \left(\text{já que } \frac{2}{n} \text{ e } \frac{5}{n^2} \to 0\right)$$

- $$\frac{n^3 - 3n + 1}{7n^3 + 3n^2 - 1} = \frac{1 - 3/n^2 + 1/n^3}{7 + 3/n - 1/n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{7}.$$

Uma sequência (a_n) é **monótona crescente** se $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
A sequência é **monótona decrescente** se $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema: Se (a_n) é monótona e limitada então (a_n) converge. Mais precisamente, se (a_n) é monótona crescente e é limitada superiormente, ou se (a_n) é monótona decrescente e é limitada inferiormente, então (a_n) é convergente.

Prova: Se (a_n) é limitada superiormente então existe $A = \sup\{a_n\}$, pelo Axioma de Completude de $\mathbb{R}$. Se (a_n) é monótona crescente, vamos mostrar que $a_n \to A$. Dado $\varepsilon > 0$, uma propriedade que provamos do supremo garante que existe um elemento $a_N \in \{a_n\}$ tal que

$$A - \varepsilon < a_N \leq A$$

Como (a_n) é crescente, $\forall n \geq N$, $a_n \geq a_N$ e como $A = \sup\{a_n\}$, $a_n \leq A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\forall n \geq N$, vale

$$A - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq A \implies |a_n - A| < \varepsilon. \quad \square$$

Teorema do sanduíche. Sejam (a_n), (b_n) e (c_n) sequências numéricas e suponha que

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad a_n \leq b_n \leq c_n$,

(ii)
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$$

Então
$$\lim_{n\to\infty} b_n = A$$

Prova: Dado $\varepsilon > 0$, temos que encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N$, $|b_n - A| < \varepsilon$.

Isso é equivalente a dizer que, se $n \geq N$, então

$$A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon.$$

Como $\lim a_n = \lim c_n = A$, podemos escolher N tal que

$$\left.\begin{array}{l} |a_n - A| < \varepsilon \iff A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \\ |c_n - A| < \varepsilon \iff A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon. \end{array}\right\} \quad \forall n \geq N$$

Assim, para esse N e para $n \geq N$

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon. \qquad \square$$

<u>Exemplo</u>: $\dfrac{\operatorname{sen}(1/n)}{(1/n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Que $\cos 1/n \longrightarrow 1$ quando $n \to \infty$ é consequência da definição. Das desigualdades

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

que provamos anteriormente, e do teorema anterior, obtemos

$$\begin{array}{ccccc}
\cos(1/n) & < & \dfrac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} & < & \dfrac{1}{\cos(1/n)} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \text{Teorema do Sandwiche},\ n\to\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\
\underline{1} & & \underline{1} & & 1/1 = 1
\end{array}$$

$\square$

Exemplo: A série geométrica.

Exercício: Seja $r \in \mathbb{R}$, $0 \leq r < 1$. Prove que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

Sugestão: $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente e limitada inferiormente (por 0, por exemplo). Portanto r^n converge. Prove que o limite tem que ser 0.

Vimos que, para todo $r \neq 1$, vale a igualdade

$$1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Se definimos

$$s_n = 1+r+r^2+\cdots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

e se tomamos $0 \leq r < 1$, segue do exercício que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1-\lim_{n\to\infty} r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}.$$

Exercícios, seção 10.4, p. 382: 4, 8, 11, 18, 23, 24, 25, 27, 29.