SME0320 Estatística I: Engenharia Aeronáutica 2023/02

Lista 4: Introdução à inferência estatística: estimadores e intervalos de confiança.

Thomas Peron
Data de publicação: 13/11/2023. Data da provinha: $\boxed{05/12/2023}$.

1. Seja X_1, X_2, X_3, ..., X_n uma amostra aleatória com média desconhecida $E(X_i) = \mu$ e variância desconhecida $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$. Suponha que desejamos estimar $\theta = \mu^2$. Definimos o estimador $\hat{\Theta}$ como

$$\hat{\Theta} = \left(\overline{X}\right)^2 = \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right]^2$$

para estimar θ. $\hat{\Theta}$ é um estimador não viesado de θ? Por quê?

2. Seja X_1, X_2, X_3, ..., X_n uma amostra aleatória da seguinte distribuição

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $\theta \in [-2, 2]$ é um parâmetro desconhecido. Definimos o estimador $\hat{\Theta}_n$ como

$$\hat{\Theta}_n = 12\overline{X} - 6$$

para estimar θ.

   (a) $\hat{\Theta}_n$ é um estimador não viesado de θ?
   (b) Encontre o erro quadrático médio (MSE) de $\hat{\Theta}_n$. O que ocorre com o MSE quando o tamanho da amostra $n \to \infty$?

3. (*Estimando a proporção*) Seja $X \sim \mathrm{Binomial}(n, p)$. Mostre que $\widehat{P} = X/n$ é um estimador não viesado para p.

4. Seja $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória em que $X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$; considere que n seja suficientemente grande para que o Teorema Central do Limite possa ser aplicado de forma satisfatória. Escreva um intervalo de $(1 - \alpha)100\%$ de confiança para o parâmetro p em termos da média empírica, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_i X_i$, e dos quantis $z_{\alpha/2}$ da distribuição normal.

5. Uma pesquisa de mercado entrevistou 1000 passageiros de forma aleatória num determinado aeroporto, e descobriu-se que 228 preferem voar com a linha aérea A em vez de B. Encontre um intervalo de confiança de 99% para a proporção de passageiros que preferem a empresa A. *Dica:* Utilize o resultado do exercício anterior.

6. 200 estudantes universitários foram entrevistados de forma aleatória, e 114 deles manifestaram-se contrários à adesão a uma greve estudantil.

   (a) Encontre um intervalo de 96% de confiança para a fração de estudantes contrários à greve.
   (b) O que podemos afirmar, com 96% de confiança, sobre o possível erro de nossa estimativa se a fração de alunos contrários à greve for 0.57?

7. Uma amostra aleatória X_1, X_2, X_3, ..., X_{100} é fornecida a partir de uma distribuição com variância conhecida $\mathrm{Var}(X_i) = 81$. Para a amostra observada, a média amostral é $\overline{X} = 50.1$. Encontre um intervalo de confiança aproximado de 95% para $\theta = \mathbb{E}[X_i]$.

8. Seja X_1, X_2, X_3, ..., X_{100} uma amostra aleatória de uma distribuição com variância desconhecida $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Para a amostra observada, a média amostral é $\overline{X} = 110.5$, e a variância amostral é $S^2 = 45.6$. Encontre um intervalo de confiança de 95% para $\theta = \mathbb{E}[X_i]$.

9. Uma amostra aleatória X_1, X_2, X_3, ..., X_{36} é fornecida a partir de uma distribuição normal com média desconhecida $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ e variância desconhecida $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$. Para a amostra observada, a média amostral é $\overline{X} = 35.8$, e a variância amostral é $S^2 = 12.5$.

   (a) Encontre e compare intervalos de confiança de 90%, 95%, e 99% para μ.

   (b) Encontre e compare intervalos de confiança de 90%, 95%, e 99% para σ^2.

Respostas:

1. É viesado.

2. (a) Sim.

   (b) $MSE(\hat{\Theta}_n) = \frac{12-\theta^2}{n}$.

5 IC(p) = [0.194, 0.262].

6 (a) IC(p) = [0.498, 0.642]

7 IC(θ) = [48.3, 51.9].

8 $\approx [109.18, 111.82]$.

9 (a)

$$
\begin{aligned}
90\%\ \text{IC} &:\approx [34.80, 36.80],\\
95\%\ \text{IC} &:\approx [34.60, 37.00],\\
99\%\ \text{IC} &:\approx [34.20, 37.40].
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
90\% &: \approx [8.79, 19.47].\\
95\% &: \approx [8.22, 21.27].\\
99\% &: \approx [7.26, 25.45].
\end{aligned}
$$