MAT-2464 - Lista 2 - Integral

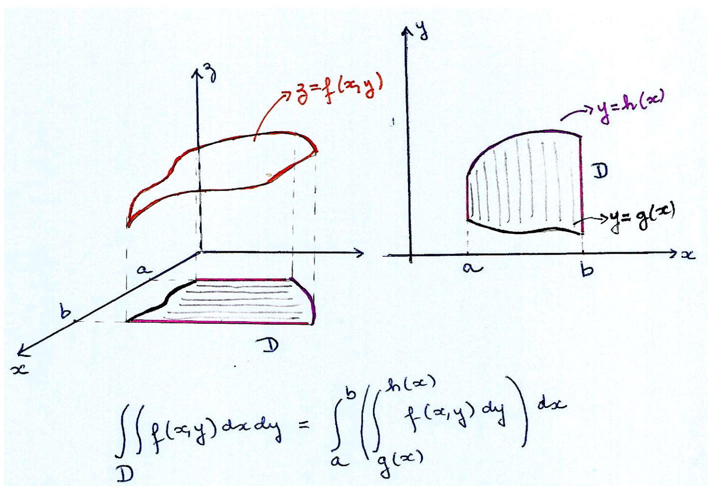
O teorema de Fubini permite reduzir as integrais duplas ao cálculo de duas integrais simples, sob algumas condições.

Teorema de Fubini I: Seja $R = [a, b] \times [c, d]$ e $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então

$$\int\int_R f(x, y)dxdy = \int_a^b [\int_c^d f(x, y)dy]dx = \int_c^d [\int_a^b f(x, y)dx]dy$$

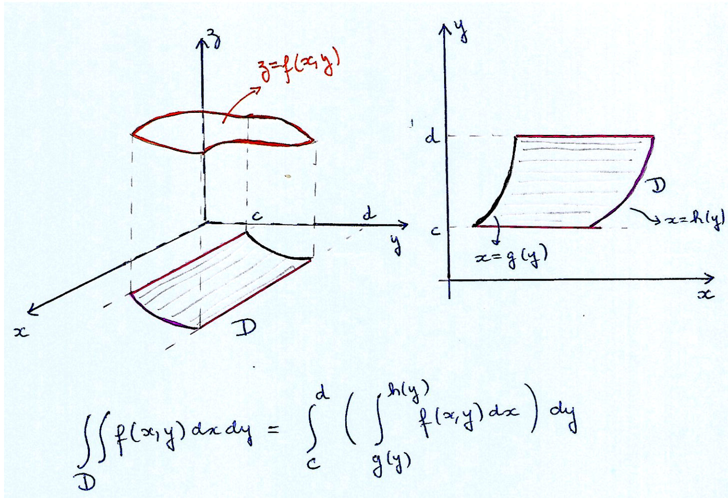
Teorema de Fubini II: Sejam $g, h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas com $g(x) \leq h(x)$, $\forall\ x \in [a, b]$, e considere $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$. Se $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int_a^b [\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)dy]dx$$



Teorema de Fubini III: Sejam $g, h : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas com $g(y) \leq h(y)$, $\forall\ y \in [c, d]$, e considere $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ g(y) \leq x \leq h(y)\}$. Se $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int_c^d [\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)dx]dy$$



Exercícios

(I) Calcule as seguintes integrais duplas, esboçando a região de integração:

(1) $\displaystyle\int\int_D xy^2 dxdy$, onde D é o retângulo $1 \leq x \leq 2$ e $2 \leq y \leq 3$.

(2) $\displaystyle\int\int_D x cos(2y) dxdy$, onde D é o retângulo $0 \leq x \leq 1$, $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$.

(3) $\displaystyle\int\int_D \frac{sen^2 x}{1+y^2} dxdy$, D o retângulo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq 1$.

(4) $\displaystyle\int\int_D xy^3 dxdy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2x\}$

(5) $\displaystyle\int\int_D e^{\frac{x}{y}} dxdy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2,\ y \leq x \leq y^3\}$

(6) $\displaystyle\int\int_D (x+y) dxdy$, D a região do plano limitada pelos gráficos das funções $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$.

(7) $\displaystyle\int\int_D (y^2 - x) dxdy$, D limitada por $x = y^2$ e $x = 3 - 2y^2$.

(II) Determine o volume dos seguintes sólidos S:

(1) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \, 0 \leq y \leq 1, \, 0 \leq z \leq x + 2y\}$

(2) S é o tetraedro com faces nos planos coordenados e no plano $x + y + z = 2$.

(3) S é o sólido abaixo do gráfico da função $f(x, y) = \dfrac{e^{\frac{x}{\sqrt{y}}}}{y^2}$, acima do plano xy, com $(x, y) \in D$, sendo D limitada por $x \geq 1$, $y = 2$ e $y = x^2$.

(4) S é limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelos planos $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$ e $x + y = 1$.