Integral Dupla

Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ definido por $R = [a,b] \times [c,d]$, e considere P_1 uma partição de $[a,b]$ e P_2 uma partição de $[c,d]$:

$$P_1 : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_r = b$$

$$P_2 : c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{j-1} < y_j < \ldots < y_s = d$$

Os pontos da forma (x_k, y_j), $1 \leq k \leq r$, $1 \leq j \leq s$, determinam uma partição P do retângulo R em subretângulos $R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_n$, sendo que cada retângulo é da forma $R_i = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$ (reenumerando os pontos de ambas as partições). Designando $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\triangle y_i = y_i - y_{i-1}$, vale que a área de cada retângulo R_i é igual a $A(R_i) = \triangle x_i \triangle y_i$.

O diâmetro da partição P é definido como

$\triangle P =$ o maior dos comprimentos das diagonais dos retângulos $R_1, \ldots R_n$.

Seja $R = [a,b] \times [c,d]$ e uma função $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$. Dizemos que f é integrável se existe um número real l tal que

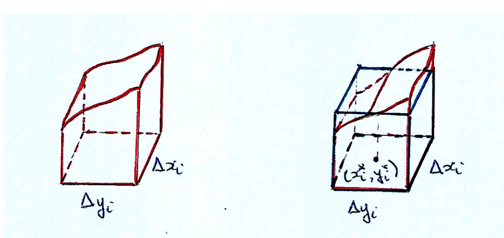
$$\lim_{\triangle P \longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \triangle x_i \triangle y_i = l$$

isto é: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer partição P do retângulo R, se $\triangle P < \delta$ então $|\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \triangle x_i \triangle y_i - l| < \epsilon$, onde $(x_i^*, y_i^*) \in R_i$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$.

Neste caso, escrevemos $l = \int\int_R f(x,y)dxdy$, e temos, portanto,

$$\boxed{\int\int_R f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \triangle x_i \triangle y_i}$$

Em particular, se $f(x,y) \geq 0$, $\forall\ (x,y) \in R$, a integral corresponderá ao volume do sólido limitado pelo gráfico da função f e op retângulo R.



Suponhamos agora $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto limitado e com área no plano. Então existe um retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$ que contém D. Seja $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, uma função. Para definir a integral de f em D, consideramos a função f definida em R, de forma que $f(x,y)$ seja igual a zero nos pontos de $R - D$. Diremos que f é integrável (em D) se for integrável em R.

Algumas propriedades da integral dupla

Fixemos $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto limitado e com área.

Propriedade 1: Se $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável então f é limitada.

Propriedade 2: Sejam $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis. Então $f + g$ é integrável e

$$\int\int_D (f(x,y) + g(x,y))dxdy = \int\int_D f(x,y)dxdy + \int\int_D g(x,y)dxdy$$

Propriedade 3: Se $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável e $c \in \mathbb{R}$ então cf é integrável e

$$\int\int_D cf(x,y)dxdy = c\int\int_D f(x,y)dxdy$$

Propriedade 4: Sejam $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis. Se $f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall\ (x,y) \in D$ então

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \leq \int\int_D g(x,y)dxdy$$

Propriedade 5: Se $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável então $|f|$ também é integrável e

$$|\textstyle\int\int_D f(x,y)dxdy| \leq \displaystyle\int\int_D |f(x,y)|dxdy$$

Propriedade 6: Sejam $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ subconjuntos de D limitados e com área tais que

$$\begin{cases} D_1 \cup\ D_2 = D \\ D_1\ \cap\ D_2 \text{ tem área nula} \end{cases}$$

Então, dada $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, se f é integrável em D_1 e em D_2 então f é integrável em D e

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{D_2} f(x,y)dxdy$$

Propriedade 7: Se D é compacto e f é contínua então f é integrável em D.