P1 - MATEMÁTICA I - CCM - 2023

Novembro /2023

(pós greve)

P1 - Matemática I - CCM - 2023 : Instruções

- Você pode usar o que quiser para entender e resolver as questões da prova: livros, colegas, a monitora, eu, chatgpt, oráculos, búzios, etc.

- Depois disso, cada um escreve suas resoluções, desde que tenha entendido o que está escrevendo.

- Dê crédito a quem crédito é devido.

- Entregue a prova resolvida em papel, escrita com capricho, na terça, dia 21/11/23.

- Aprender é uma das coisas mais interessantes e prazerosas da vida. Não perca isso de vista enquanto faz a prova. Divirta-se.

P1 - Matemática I - CCM - 2023

Q1 (a) Seja $p \in \mathbb{N}$. Prove que, para quaisquer números $a, b \in \mathbb{R}$, vale

$$a^p - b^p = (a-b)\left(a^{p-1} + a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 + \cdots + a^2b^{p-3} + ab^{p-2} + b^{p-1}\right).$$

(b) Mostre que, se p é par, então para $a, b \in \mathbb{R}$ não ambos nulos,

$$a^p + a^{p-1}b + a^{p-2}b^2 + \cdots + a^2b^{p-2} + ab^{p-1} + b^p > 0.$$

(c) Sejam $p, n \in \mathbb{N}$. Use (a) para mostrar que

$$n^p < \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1} < (n+1)^p.$$

(d) Prove, por indução, que $s_n = \dfrac{1}{n^{p+1}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \dfrac{1}{p+1} < \dfrac{1}{n^{p+1}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p = t_n$.

Extra: Sejam s_n e t_n as sequências definidas em (d). Mostre que s_n é crescente (isto é, $s_{n+1} > s_n$) e t_n é decrescente ($t_{n+1} < t_n$).

Q2 Sejam $\varepsilon > 0$ e $x_0 \neq 0$. Suponha que $|x - x_0| < \frac{|x_0|}{2}$ e $|x - x_0| < \frac{\varepsilon |x_0|^2}{2}$. Prove que $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$.

Q3 (a) Se $0 < a < b$, mostre que $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.

(b) Suponha agora que $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ e defina

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{(média aritmética)}$$

$$G_n = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \quad \text{(média geométrica)}$$

Se $a_1 < A_n$, então existe algum $a_i > A_n$. Re-indexando, se necessário, podemos supor que $a_2 > A_n$. Defina $\bar{a}_1 = A_n$ e $\bar{a}_2 = a_1 + a_2 - A_n$ e mostre que

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \geq a_1 a_2 .$$

(c) Use o item (b) para provar por indução que $G_n \leq A_n$.

(d) Quando vale a igualdade $G_n = A_n$?

Q4 Sejam S e T subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$ e suponha que $\forall s \in S, \forall t \in T,$ $s \leq t$.

(a) Suponha que

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0, \ \exists s \in S, t \in T \text{ tais que } t - s < \varepsilon.$$

Prove que $\sup S = \inf T$.

(b) Dê um exemplo para mostrar que sem a condição $(*)$ o resultado de (a) é falso.

Q5 Para cada uma das funções a seguir, decida se é integrável no intervalo dado. Se sim, explique por que e calcule a integral. Se não, mostre por que não.

(a) $f_1(x) = x\sqrt{1-x^2}$, em $[-1,1]$.

(b) $f_2(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1,0] \\ 2x-1, & x \in (0,1] \end{cases}$, em $[-1,1]$.

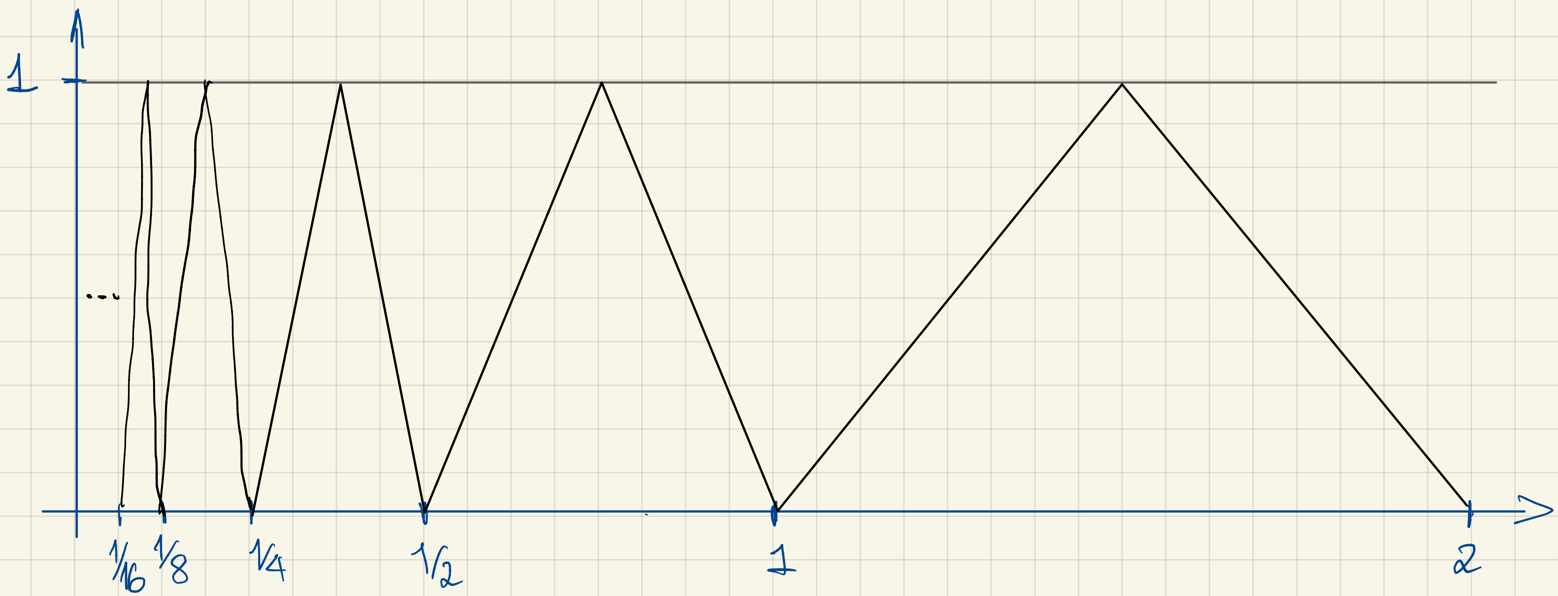
(c) $f_3(x) = x - [x]$, em $[0,2]$, onde $[x]$ é o maior inteiro menor ou igual a x, isto é, $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

(d) $f_4(x) = \begin{cases} x - [x], & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$, em $[0,2]$.

(e) $f_5(x) = \begin{cases} x - [x], & \text{se } x \text{ é racional} \\ x + [x], & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$, em $[0,1]$.

(f) $f_6(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = a + b\sqrt{2}, \text{ onde } a, b \text{ são racionais} \\ 1, & \text{se } x \text{ não é da forma acima} \end{cases}$, em $[0,1]$.

(g) $f_7(x)$ é a função cujo gráfico é



Q6 Calcule a área entre os gráficos dos pares de funções a seguir sobre os intervalos dados.

(a) $f_1(x) = \operatorname{sen} x$, $g_1(x) = \frac{2}{\pi} x$, em $[0, \pi/2]$.

(b) $f_2(x) = \lambda(x^2 - 1)$, $g_2(x) = \lambda(1 - x^4)$, em $[-1, 1]$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $f_3(x) = x^4$, $g_3(x) = 1 - x^2$, em $[0, a]$, onde $a > 0$ é tal que $f_3(a) = g_3(a)$.

(d) Mesmas funções de (c) em $[a, 1]$.