Exercício 17 da Lista 5 CORREÇÃO

Seja V um espaço vetorial de dimensão n e sejam U e W subespaços de V.

As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $V = U \oplus W$.

(b) Se B é uma base de U e C é uma base de W então $B \cap C = \emptyset$ e $B \cup C$ é uma base de V.

(c) $V = U + W$ e $\dim V = \dim U + \dim W$.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sabemos que (a) $\begin{cases} V = U + W \\ U \cap W = \{0\} \end{cases}$

Sejam B uma base de U
C uma base de W.

Como $U \cap W = \{0\}$ temos que
$B \cap C = \emptyset$ (Se não, teríamos $v \in B \cap C$ e $v \neq 0$ (pois é vetor de base) $\Rightarrow [v] \subset U \cap W \neq \{0\}$.

Se $B = \{u_1, \ldots, u_r\}$ e
$C = \{w_1, \ldots, w_s\}$
e como $B \cap C = \emptyset$ temos que
$B \cup C = \{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s\}$

(i) $[B \cup C] = V$

De fato, como $V = U + W$, se $v \in V$, então $v = u + w$, $u \in U$ e $w \in W$.

Logo, $u = a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r$, $a_i \in \mathbb{R}$
$w = b_1 w_1 + \cdots + b_s w_s$, $b_i \in \mathbb{R}$

Então

$v = u + w$ é claramente uma combinação linear de $B \cup C$.

(2) $B \cup C$ é LI

Suponha que $a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r + b_1 w_1 + \cdots + b_s w_s = 0$.

Então $\underbrace{a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r}_{\in U} = -\underbrace{(b_1 w_1 + \cdots + b_s w_s)}_{\in W}$

Como $U \cap W = \{0\}$ temos que

$a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r = 0$ e $b_1 w_1 + \cdots + b_s w_s = 0$

Como B e C são bases, eles são LI, logo $a_1 = \cdots = a_r = 0$

$b_1 = \cdots = b_s = 0$.

Logo, (a) $\Rightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (c) Como $B \cup C$ é uma base de V, então $[B \cup C] = V$

Se $v \in V$, $v = \underbrace{a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r}_{\in U} + \underbrace{b_1 w_1 + \cdots + b_s w_s}_{\in W}$

Logo, $v = u + w$, $u \in U$ e $w \in W$.

$\Rightarrow V = U + W$

B base de $U \Rightarrow \dim U = r$

C base de $W \Rightarrow \dim W = s$

Como $B \cap C = \emptyset$, $B \cup C = \{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s\}$ e nº de vetores em $B \cup C$ é igual a $r+s = \dim U + \dim W$.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Já temos que $V = U + W$

Temos que provar que $U \cap W = \{0\}$

Usando a fórmula do exercício 16

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$$

e tendo $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$

concluimos que $\dim U \cap W = 0$, o que

implica que $U \cap W = \{0\}$. ∎

$$\boxed{(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)}$$

As afirmações são equivalentes.