$4^{\underline{a}}$ Lista de exercícios – MAT0349

Entregar exercício **2**, itens **(d), (e), (f)**, exercício **5**, item **(a)**, exercício **6**, itens **(a), (b), (g), (h)**, e exercício **7**, itens **(f) a (j)**.

Considere **L** a linguagem dos corpos e conjuntos numéricos. A saber, **L** é constituído pelas constantes 0 e 1, os símbolos funcionais $+$ e $\cdot$ e o símbolo relacional $<$.

Chamaremos de *axiomas de corpo* o seguinte conjunto de sentenças da linguagem **L**:

1. $0 \neq 1$;
2. $\forall x(x + 0 = x)$;
3. $\forall x(x \cdot 1 = x)$;
4. $\forall x \forall y(x + y = y + x)$;
5. $\forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$;
6. $\forall x \forall y \forall z((x + y) + z = x + (y + z))$;
7. $\forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$;
8. $\forall x \exists y(x + y = 0)$;
9. $\forall x((\neg(x = 0)) \to \exists y(x \cdot y = 1))$;
10. $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))$.

Os *axiomas de corpo ordenado* são os axiomas de corpo adicionados dos seguintes axiomas de ordem.

O1 $\forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$;

O2 $\forall x \forall y(x < y \to (\neg(x = y) \wedge \neg(y < x))$;

O3 $\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$;

O4 $\forall x \forall y((0 < x \wedge 0 < y) \to (0 < x + y \wedge 0 < x \cdot y))$;

O5 $\forall x \forall y((x + y = 0 \wedge x < 0) \to 0 < y)$.

1. Considere $\mathcal{M}$ o seguinte modelo para a linguagem $\mathbf{L}$:

$D = \{1, 2, 3\}$;

$0^{\mathcal{M}} = 1$;

$1^{\mathcal{M}} = 2$;

$+^{\mathcal{M}} = \{(1,1,1),(1,2,2),(1,3,3),(2,1,2),(2,2,3),(2,3,1),(3,1,3),(3,2,1),(3,3,2)\}$;

$\cdot^{\mathcal{M}} = \{(1,1,1),(1,2,1),(1,3,1),(2,1,1),(2,2,2),(2,3,3),(3,1,1),(3,2,3),(3,3,2)\}$;

$<^{\mathcal{M}} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{M}$ satisfaz todos os axiomas de corpo.

(b) Verifique se $\mathcal{M}$ satisfaz os axiomas de corpo ordenado.

2. Considere $\mathcal{M}$ o modelo do exercício anterior e σ uma valoração tal que:

$\sigma(x) = 1$

$\sigma(y) = 2$

$\sigma(z) = 3$

Verifique quais das seguintes fórmulas abaixo são verdadeiras no modelo $\mathcal{M}$ mediante a atribuição σ (entenda $t \leq s$ como abreviatura de $(t < s) \vee (t = s)$).

(a) $\forall y((y \neq 0) \rightarrow (y \cdot x = y))$;

(b) $\forall y \exists x((y \neq x) \wedge (y \leq x))$;

(c) $\exists x \forall y(x \leq (y + 1))$;

(d) $\forall x \exists y(x \leq (y + 1))$;

(e) $((0 < x) \wedge (0 < y)) \rightarrow (0 < x + y)$;

(f) $\forall x \forall y(((0 < x) \wedge (0 < y)) \rightarrow (0 < x + y))$;

3. Mude o modelo dos exercícios 1 e 2 tomando, no lugar de $+^{\mathcal{M}}$, a seguinte função: $+^{\mathcal{M}} = \{(1,1,1),(1,2,1),(1,3,1),(2,1,2),(2,2,2),(2,3,2),(3,1,3),(3,2,3),(3,3,3)\}$.

Verifique quais axiomas de corpo continuam valendo nesse novo modelo e quais deixam de valer.

4. Seja Γ o conjunto dos axiomas de corpo. Para cada sentença A abaixo construa um modelo (se existir) que satisfaça $\Gamma \cup \{A\}$ e outro (se existir) que satisfaça $\Gamma \cup \{\neg A\}$. Justifique.

(a) $\exists x(x \cdot x = 1 + 1)$;

(b) $\exists x \exists y((x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \wedge (x \cdot y = 0))$;

(c) $1 + 1 = 1$.

5. Chamaremos de *axiomas de álgebras de Boole* o seguinte conjunto de sentenças da linguagem **B**, com as constantes 0 e 1, os símbolos funcionais binários $+$ e $\cdot$, o símbolo funcional unário $-$ e o símbolo relacional binário $\leq$.

$B1$ $\forall x \forall y \forall z(x + (y + z) = (x + y) + z)$; (associatividade)

$B1'$ $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

$B2$ $\forall x \forall y(x + y = y + x)$; (comutatividade)

$B2'$ $\forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$;

$B3$ $\forall x \forall y(x + (x \cdot y) = x)$; (absorção)

$B3'$ $\forall x \forall y(x \cdot (x + y) = x)$;

$B4$ $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))$; (distributividade)

$B4'$ $\forall x \forall y \forall z(x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z))$;

$B5$ $\forall x(x + (-x) = 1)$; (complementação)

$B5'$ $\forall x(x \cdot (-x) = 0)$.

Considere $\mathcal{M}$ um modelo para **B** definido da seguinte forma:

$D = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (o conjunto das partes dos números naturais);

$0^{\mathcal{M}} = \emptyset$;

$1^{\mathcal{M}} = \mathbb{N}$;

$\leq^{\mathcal{M}} = \{(X, Y) \in D^2 : X \subseteq Y\}$;

$+^{\mathcal{M}} = \{(X, Y, Z) \in D^3 : X \cup Y = Z\}$;

$\cdot^{\mathcal{M}} = \{(X, Y, Z) \in D^3 : X \cap Y = Z\}$;

$-^{\mathcal{M}} = \{(X, Y) \in D^2 : Y = \mathbb{N} \setminus X\}$.

(a) Prove que $\mathcal{M}$ satisfaz os axiomas de álgebras de Boole.

(b) Verifique quais dos axiomas de corpo são verdadeiros em $\mathcal{M}$ e quais não são.

6. (Axiomas de Peano) Considere a linguagem da Aritmética de Peano com a constante 0, os símbolos funcionais binários $+$ e $\cdot$ e o símbolo funcional unário s ("sucessor de").

Considere dois modelos para a Aritmética de Peano. Definimos $\mathcal{M}_1$ como o modelo padrão dos números naturais. Isto é, o domínio é $\mathbb{N}$, os símbolos 0, $+$ e $\cdot$ são interpretados de maneira usual e $s^{\mathcal{M}_1}(n) = n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Já $\mathcal{M}_2$ será tomado como o mesmo modelo do exercício 1, desconsiderando as interpretações de 1 e $<$ e adicionando a interpretação de s como:

$$s^{\mathcal{M}_2} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}.$$

Verifique, em cada um desses modelos, se cada uma das seguintes sentenças é verdadeira ou não.

(a) $\forall x \neg(s(x) = 0)$;

(b) $\forall x \forall y(s(x) = s(y) \to x = y)$;

(c) $\forall x \neg(s(x) = x)$;

(d) $\forall x(x + 0 = x)$;

(e) $\forall x \forall y(x + s(y) = s(x + y))$;

(f) $\forall x(x \cdot 0 = 0)$;

(g) $\forall x \forall y(x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x$.

(h) $s(0) + s(0) = s(s(0))$.

7. (Formalização da lógica proposicional na lógica de primeira ordem). Seja L_P a linguagem de primeira ordem formada pela constante $\top$, símbolo funcional unário $\sim$ e os símbolos funcionais binários $\sqcap$, $\sqcup$, $\supset$ e $\leftrightharpoons$. Considere $\mathcal{M}$ o seguinte modelo para L_P:

$D = \{0, 1\}$;

$\top^{\mathcal{M}} = 1$;

$\sim^{\mathcal{M}} = \{(0, 1), (1, 0)\}$;

$\sqcap^{\mathcal{M}} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$;

$\sqcup^{\mathcal{M}} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$;

$\supset^{\mathcal{M}} = \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$;

$\leftrightharpoons^{\mathcal{M}} = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$.

Verifique para quais valorações σ cada uma das fórmulas seguintes é verdadeira no modelo $\mathcal{M}$ mediante a valoração σ.

(a) $(x \supset y) = (x \sqcup (\sim x))$;

(b) $(\sim (x \sqcup y)) = ((\sim x) \sqcap (\sim y))$;

(c) $\exists x((x \supset y) = y)$;

(d) $x \sqcup (y \supset z) = \top$;

(e) $(x \sqcup y) \sqcap z = \sim \top$;

(f) $((\sim x) \leftrightharpoons (y \sqcup z)) = \sim \top$;

(g) $(x \supset y) \sqcap (y \supset z) = \top$;

(h) $(x \supset (y \supset x)) = (z \supset z)$;

(i) $(x \leftrightharpoons y = \top) \leftrightarrow (x = y)$;

(j) $x \sqcap (\sim x) = \forall y(y \supset y)$.