

7600018 - Mecânica Clássica (2023)

Formalismo Lagrangiano

Texto baseado nos Caps. 6 e 7 do Marion [1] e Cap. 3 (Seções 3.6 e 3.7) do Kibble [2]. Serão cobertos os tópicos referentes ao cálculo variacional, o princípio de mínima ação, equações de Lagrange e sistemas com vínculos. Veremos como, partindo do cálculo variacional, são reobtidas as leis de Newton, vistas anteriormente, através de um formalismo bem mais geral (e por um tratamento bem mais elegante!)

1 Cálculo Variacional

Da mesma forma como calculamos anteriormente, e.g., o ponto em que a energia potencial $V(x)$ tem seu mínimo para investigar o movimento em um campo de força conservativo, é muito comum querermos solucionar problemas envolvendo mínimos (e máximos) de grandezas de interesse físico, que podem porém não depender de apenas uma variável, ao contrário da função $V(x)$. De fato, considere o problema “trivial” de demonstrar que o menor caminho entre dois pontos sobre um plano é uma reta. Nesse caso temos uma grandeza que queremos minimizar, o comprimento do caminho, mas não é claro como devemos fazê-lo, já que não se trata de uma função de uma variável, e sim de uma “função” do próprio caminho! Mais especificamente, o que queremos minimizar é uma **integral** de um *funcional* (i.e. uma função de uma função) do caminho, que é dado no plano xy por $y(x)$. Para cada possível caminho $y(x)$, o comprimento l será

$$l = \int dl = \int_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx, \quad (1)$$

onde utilizamos a seguinte expressão para a distância dl entre pontos próximos

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Nosso problema é buscar um mínimo de l entre todos os caminhos $y(x)$ com pontos iniciais (x_0, y_0) e finais (x_1, y_1) , mas como?

Tomemos, em geral, o problema de minimizar (como acima) uma integral I em x de um funcional f que depende de $y(x)$ e $y'(x)$

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(y, y') dx,$$

onde já utilizamos que os extremos da integral serão determinados apenas por x_0 e x_1 , já que os valores de y correspondentes, i.e. y_0 e y_1 , serão *fixos* e dados respectivamente por $y(x_0)$ e $y(x_1)$. Em particular, no caso acima, há dependência¹ apenas de y' e não de y .

Podemos escrever a variação do funcional f devido a uma variação δy na função $y(x)$ como

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y',$$

onde podemos substituir

$$\delta y' = \frac{d(\delta y)}{dx}.$$

(Note que a variação δy é função de x , e portanto a variação correspondente em y' será sua derivada em relação a x .)

Consequentemente, temos a variação para a integral

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d(\delta y)}{dx} \right) dx.$$

Integrando o segundo termo por partes, e notando que $\delta y = 0$ nos limites de integração [pois queremos que $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$ para todas as funções $y(x)$ consideradas, impondo variação nula para y nesses pontos], temos

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y(x) dx. \quad (2)$$

Vamos lembrar agora que queremos $\delta I = 0$ (pois o valor estacionário, ou extremo, corresponde a variação nula, como para o mínimo/máximo da energia potencial em função de x) para *qualquer* variação em $y(x)$ (apenas mantendo as pontas fixas). Isso só pode ser obtido se a expressão em colchetes for nula para todo x . Temos, portanto, a condição

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0, \quad (3)$$

¹Tipicamente, vamos considerar funções do tempo t , e as grandezas de interesse dependerão da trajetória $x(t)$ e da velocidade $\dot{x}(t)$, respectivamente assumindo o papel de $y(x)$ e de $y'(x)$.

conhecida como **Equação de Euler-Lagrange**.

Note que a expressão acima é uma equação diferencial de segunda ordem em $y(x)$, cuja solução envolve duas constantes a serem determinadas pelas condições de contorno. Troque $y(x)$ por $x(t)$ e veja que é algo muito semelhante à segunda lei de Newton!

Ok, vamos voltar ao problema que queríamos resolver, de encontrar a curva de menor comprimento entre dois pontos no plano xy . Tais curvas se chamam em geral *geodésicas*, fornecendo a menor distância entre dois pontos ao longo de uma dada superfície. Aqui, tomando a superfície plana, sabemos que a resposta será uma reta ligando os pontos. Vejamos se a condição de mínimo fornece o resultado esperado. Para funcional $f = \sqrt{1 + y'^2}$, temos $\partial f / \partial y = 0$, ou seja para integral I dada por l na Eq. (1), e a equação de Euler-Lagrange fornece simplesmente

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0.$$

Mas isso equivale a dizer que a expressão entre parênteses é uma constante, o que implica y' constante. Integrando, segue que

$$y(x) = ax + b,$$

onde a e b são constantes [que devemos ajustar para obter $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$]. Ou seja, uma reta!

Note: é um pouco difícil imaginar o que significa a variação δI acima. Para ajudar, podemos considerar a variação de $y(x)$ como uma função $\eta(x)$ vezes um parâmetro α , i.e. $\delta y(x) = \alpha \eta(x)$. Em particular, podemos buscar α que minimize I para uma dada função $\eta(x)$, o que equivale a procurar pelo valor estacionário de I na “direção” $\eta(x)$ do espaço de funções. Claramente, para encontrar o verdadeiro mínimo de I temos que considerar todas as direções nesse espaço, ou seja, considerar todas as possíveis variações de $y(x)$. Como exemplo, imagine uma variação $\delta y(x)$ ao redor da linha reta, considerada acima, causando oscilação ao redor dela, como na Figura 1 abaixo. Temos

$$y(x) = x + \alpha \sin x \equiv y(\alpha, x),$$

i.e. uma proposta de variação senoidal ao redor da reta $y(x) = x$, correspondendo a $\eta(x) = \sin x$, entre 0 e 2π . Vamos agora buscar o valor de α que minimize a integral $I(\alpha)$, ou seja a distância $l(\alpha)$ dada em (1). Nesse caso, reduzimos a busca do mínimo a um único

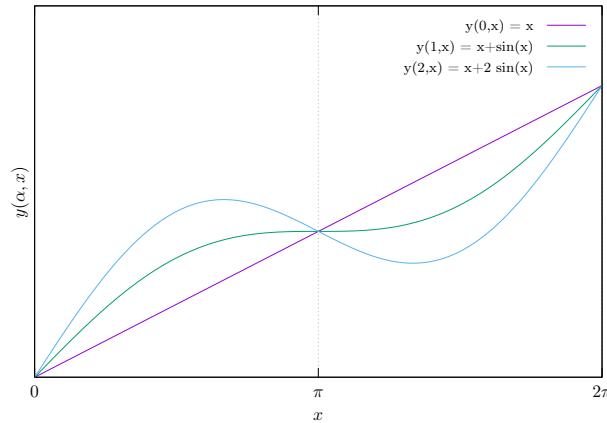


Figura 1: Exemplo de cálculo variacional. Consideramos a variação $\delta y(x)$ ao redor da reta $y = x$ na “direção” da função seno, parametrizada por α . As curvas representam valores de $\alpha = 0, 1, 2$.

parâmetro, e podemos simplesmente derivar $I(\alpha)$ em relação a α e igualar a zero, como para $V(x)$ mencionado anteriormente. Temos

$$l(\alpha) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (1 + \alpha \cos x)^2} dx.$$

Suponha que você não sabe, ou está com preguiça de, calcular a integral acima. O que queremos é o mínimo de $l(\alpha)$, portanto podemos notar que, já que a expressão entre parênteses é positiva, deve ser suficiente encontrar α que corresponda ao mínimo de

$$\int_0^{2\pi} (1 + \alpha \cos x)^2 dx = \int_0^{2\pi} (1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2 \cos^2 x) = 2\pi + \alpha^2\pi.$$

Assim, temos o mínimo para $\alpha = 0$, correspondendo a $l(\alpha) = 2\pi\sqrt{2}$, i.e. o comprimento da reta $y = x$ entre 0 e 2π , como esperado. Encontramos, portanto, o mesmo resultado acima, mas de forma bem menos geral (pois fizemos a busca apenas entre variações proporcionais a $\sin x$ ao redor da reta $y = x$, que já sabíamos ser a solução do problema) e com mais esforço/gambiarra. Conclusão: é bem melhor usar a Eq. de Euler-Lagrange, Eq. (3), do que tentar adivinhar a solução do problema, ou a direção adequada para minimização.²

Vejamos mais alguns exemplos de aplicação da Eq. de Euler-Lagrange em problemas de minimização.

²Uma outra conclusão é que, ao considerar o problema de minimização como variação em relação a uma função dada, é muito conveniente ter um bom “chute” inicial para $y(x)$!

Problema da Braquistócrona. Em vez de minimizar o comprimento de uma trajetória, como acima, vamos agora identificar a solução $y(x)$ correspondente ao menor *tempo* de percurso, considerando uma partícula de massa m em um campo de força constante F na direção de x positivo. Tomando a energia potencial nula em $x = 0$ e chamando (sugestivamente!) a aceleração constante de g , temos³

$$E = K + V = -mgx + \frac{mv^2}{2} = 0,$$

e portanto a velocidade é dada por $v = \sqrt{2gx}$. (Estamos considerando a partícula em repouso para $x = y = 0$.) Podemos então escrever o tempo necessário para percorrer uma dada trajetória $y(x)$ como

$$t = \int_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} \frac{dl}{v} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gx}} dx,$$

onde usamos alguns resultados introduzidos mais acima. Utilizando a Eq. de Euler-Lagrange para $f(y, y') = \sqrt{1 + y'^2}/2gx$, obtemos que $y'/\sqrt{x(1 + y'^2)}$ é uma constante, que pode ser escolhida convenientemente como $1/\sqrt{2a}$. Escreva agora a solução para $y(x)$ na forma de uma integral, que você pode resolver com a mudança de variáveis $x = a(1 - \cos \theta)$. Ajustando a solução para partir de $(x_0, y_0) = (0, 0)$, você obterá a expressão de $y(\theta)$ correspondente ao tempo mínimo para ir de $x = y = 0$ até qualquer ponto x_1, y_1 do plano, dada por

$$y = a(\theta - \sin \theta),$$

onde ajustamos a para garantir $y(x_1) = y_1$ e os valores de θ são obtidos de $x(\theta)$ acima.

Você consegue verificar essas contas, e desenhar a curva $y(x)$? Será uma *ciclóide* (ver Fig. 6-4 do Marion), a curva descrita por um ponto na borda de um disco de raio a que gira sem deslizar ao longo do eixo y . Será que essa trajetória corresponde ao que um corpo de massa m faz ao cair sob ação de mg (girando os eixos como descrito acima)? Não, né! Portanto a segunda lei de Newton não “escolhe” o percurso mais rápido, e nem seria

³Nesse problema a partícula está em um plano sem atrito, com força $F = mg$ na direção x , portanto temos uma versão “rodada” de um problema gravitacional no plano xz , com a identificação de nosso eixo y com x do problema gravitacional e nossa horizontal x com o inverso da altura, i.e. força constante na direção $-z$. Ver Fig. 6-3 no Marion.

possível uma solução com x_1, y_1 qualquer partindo de $x = y = 0$. Note que a condição que estamos impondo é apenas de que $y(x)$ corresponda a um *extremo* da integral do funcional $f(y, y')$. Em princípio, pelo procedimento seguido, poderíamos ter um mínimo ou máximo do comprimento, ou do tempo, nos exemplos vistos.

Problema da Catenária. Considere o problema de minimizar a área descrita pela *superfície de revolução* de uma curva ligando os pontos (x_1, y_1) a (x_2, y_2) ao redor do eixo y . Spoiler: a curva será a que corresponde ao formato de uma corda pendurada entre os dois pontos e, não, o comprimento da corda não será o mínimo possível entre os dois pontos, i.e. a solução para $y(x)$ não será uma linha reta!

Como acima, escrevemos o elemento de área correspondente a dx como

$$dA = 2\pi x dl = 2\pi x \sqrt{1 + y'^2},$$

e vamos minimizar sua integral de x_1 a x_2 . (Ver Fig. 6-5do Marion.) Temos, portanto, a aplicação da Eq. de Euler-Lagrange para o funcional $f = x\sqrt{1 + y'^2}$, fornecendo

$$\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const.} \equiv a.$$

Integrando, chegamos à solução

$$y(x) = \int \frac{a dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = a \cosh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + b,$$

onde as constantes a e b serão ajustadas para que a curva passe pelos pontos desejados. Tal curva se chama *catenária*, e corresponde ao formato de uma corda flexível pendurada entre os dois pontos.

Problema da Bolha de Sabão. Repita o problema acima, mas tomando a superfície de revolução ao redor do eixo x . Claramente, estamos procurando a mínima área para a superfície que conecta dois círculos, o que se sabe que corresponde ao formato “escolhido” por uma película de sabão em tais condições!

1.1 Outras Formas da Eq. de Euler-Lagrange

Como você certamente terá notado, no desenvolvimento acima usamos a notação $f(y, y')$ independentemente de f ter uma dependência explícita também em x , mas poderíamos ter

escrito o funcional como $f(y, y'; x)$, para sinalizar que as “variáveis” em relação às quais tomaremos derivadas (associadas à variação δf) são y e y' , mas tudo é função de x , explicitamente ou não. De fato, em alguns exemplos havia essa dependência, em outros não. (O que é ok, pois as derivadas que fizemos foram em relação a y e y' , que depois relacionamos a uma derivada em x , mas você pode verificar que o procedimento é válido também para o caso de f depender de x .) No caso em que não há essa dependência, será útil escrever a condição para encontrar $y(x)$ de modo alternativo. Partindo de

$$\frac{df(y, y'; x)}{dx} = y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x},$$

chegamos a

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const.},$$

onde utilizamos a condição $\partial f / \partial x = 0$ e a Eq. (3). **Você consegue** verificar esses cálculos? (**Dica:** substitua $\partial f / \partial y$ acima pela expressão vinda da Eq. de Lagrange usual, e relacione o resultado à regra para derivada de produto.)

Essa forma da Eq. de Euler-Lagrange pode ser mais conveniente em alguns casos, como no exemplo a seguir.

Problema de Geodésica. Trata-se do menor caminho entre dois pontos quaisquer, impondo que o caminho esteja sobre uma dada superfície que contenha os pontos. Se a superfície for plana teremos uma reta, como vimos em nosso primeiro exemplo acima. Vamos encontrar a geodésica sobre uma esfera. Partindo da expressão para dl sobre a esfera de raio R

$$dl = R \sqrt{(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2},$$

onde utilizamos os arcos nas direções θ e ϕ (pois R é fixo), chegamos a

$$l = R \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2 + \sin^2 \theta} d\phi,$$

analogamente ao que tínhamos obtido acima para a distância no plano xy . Agora teremos o funcional de $\theta(\phi)$ dado por $f = \sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta}$. Porém, não será simples reproduzir os passos anteriores, pois f depende de θ além de θ' . Vamos então utilizar a forma acima para a Eq. de Euler-Lagrange, pois f não depende explicitamente de ϕ . A resposta será uma equação para $\theta(\phi)$ que corresponde à equação $Ay - Bx = z$ para x, y, z , ou seja, a intersecção da esfera com um plano que passe pelos dois pontos escolhidos.

Outra generalização bastante direta da Eq. de Euler-Lagrange é a forma correspondente à minimização da integral de um funcional de mais de uma variável, i.e. se depender de funções $y_i(x)$, com $i = 1, \dots, n$. Repetindo o desenvolvimento que fizemos anteriormente para obter (2), escrevendo a variação δI em relação às variações δy_i , teremos agora uma soma de “termos entre colchetes”, cada um multiplicando a correspondente variação δy_i . Tomando tais variações *independentes entre si*, concluímos que cada um desses termos deve se anular, e portanto vamos obter as condições

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

que permitem a determinação das funções $y_i(x)$ desejadas. (**Verifique** os cálculos.)

1.2 Equações de Euler com Condições Auxiliares

Suponha agora que, ao contrário do caso imediatamente acima, queremos encontrar duas funções $y_i(x)$ em um problema de minimização sujeito a um *vínculo*, de forma que as funções, e.g. $y(x)$ e $z(x)$, não são mais independentes, e não valem as relações (4). Tal problema é muito frequente, e por sinal inclui o caso da geodésica visto acima, que conseguimos parametrizar de forma a “embutir” o vínculo na escolha de coordenadas utilizadas. Escrevendo o vínculo como $g(y, z; x) = 0$ (por exemplo, para a geodésica da esfera temos $g = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$), vamos refazer o cálculo de δI acima, mas tomando o cuidado de relacionar as variações δy e δz entre si, através da equação de vínculo.

Mais especificamente, **refaça** os passos para chegar em (4), mas agora não podemos argumentar que as variações δy e δz são gerais e independentes, levando os respectivos termos “entre colchetes” a se anular separadamente. Em vez disso, temos que relacionar as duas variações entre si, utilizando o vínculo $g(y, z; x)$. Para isso, notamos que o funcional de vínculo é nulo para quaisquer $y(x)$, $z(x)$, e portanto sua variação também será nula. Ou seja, vale

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial y} \delta y + \frac{\partial g}{\partial z} \delta z = 0, \quad (5)$$

o que nos permite escrever, e.g., δz em função de δy . Substituindo δz como acima e isolando δy na integral em δI , teremos a condição de que a soma dos termos entre colchetes deve ser nula, pois agora ela está multiplicando a variação δy , que é geral. Obtemos, assim, que

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} = \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) \right] \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)^{-1}. \quad (6)$$

Na prática, podemos reescrever a expressão acima de forma mais útil se notarmos que os dois lados da equação são iguais a uma mesma função de x , que podemos chamar de $-\lambda(x)$. Teremos assim três equações para determinar as três funções que solucionam o problema de minimização: $y(x)$, $z(x)$ e $\lambda(x)$. **Quais são** essas três equações?

O procedimento que seguimos é equivalente a introduzir a função $\lambda(x)$ desde o início, como um *multiplicador de Lagrange* indeterminado.⁴ De fato, o que fizemos é equivalente a substituir, na integral I , o funcional f por $f(y, y', z, z'; x) + \lambda(x)g(y, z; x)$ (o que sempre podemos fazer, pois as soluções y e z que queremos correspondem a g nulo) *porém* desconsiderando $g(y, z; x) = 0$, ou seja, tomando y e z como se não estivessem relacionados. É um truque, vamos considerar que $\lambda(x)$ é uma função desconhecida, que será determinada pela solução que corresponder ao extremo da integral I . [A parte relativa a λ irá fornecer a condição $g(y, z; x) = 0$, como veremos.] Aí buscamos as condições para ter $\delta I = 0$, supondo as variações em y , z e λ *independentes* entre si! (Como anteriormente, serão também consideradas as variações de f em relação a y' e z' , relacionadas respectivamente a δy e δz , dando origem a integrais por partes, etc.) Como resultado, vamos obter as três equações mencionadas acima! Claramente, a dependência em λ é trivial, e a condição de extremização de I será associada a $g(y, z; x) = 0$, como esperado. Essa é uma das três equações. As outras duas são

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial z} = 0,$$

correspondendo a igualar os dois lados da Eq. (6) a $-\lambda(x)$. **Você percebe** que o procedimento de considerar a dependência entre as funções y e z através do funcional de vínculo

⁴Você conhece o *truque* de utilizar multiplicadores de Lagrange para minimizar/maximizar uma função de duas ou mais variáveis sujeitas a um vínculo? Em vez de considerar o vínculo como algo fixo, podemos adicionar à função que queremos extremizar a função de vínculo (que é igual a zero, como g) multiplicada por um parâmetro λ , e então procurar pelo valor de λ correspondente ao mínimo (ou máximo), dado pela condição de gradiente nulo para a função resultante. Por exemplo, minimizar a função $f(x, y)$ dada a condição $g(x, y) = 0$ corresponde a igualar a zero o gradiente (i.e. todas as derivadas nas “direções” x , y e λ) da função $\phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, sendo que agora g não é a priori nula, ou seja, x e y não estão vinculadas. Na verdade, a condição de derivada nula na direção λ restitui a condição $g = 0$, mostrando que o truque é legítimo. As outras duas condições permitem determinar λ e o valor mínimo de f .

$g(y, z; x)$ —que obedece à condição de vínculo $g = 0$, e é portanto chamado de *vínculo holonômico* (quando a condição envolve um funcional das coordenadas y e z apenas, sem suas derivadas)— corresponde a alterar o funcional f a ser minimizado, adicionando a ele o termo λg e “fingindo” não saber que y e z estão correlacionados? **Repita** os passos usuais para obtenção da Eq. de Lagrange nesse caso, e obtenha as três equações mencionadas acima, que relacionam as três funções envolvidas no problema (y , z e λ). Às vezes é útil, como aqui, “complicar” inicialmente o problema para simplificar sua solução, ou para esclarecer alguns de seus aspectos, como veremos mais adiante no caso das *forças de vínculo*.

Em geral, teremos as condições obtidas acima envolvendo n funções $y_i(x)$, e possivelmente mais m equações de vínculo, associadas a funções adicionais $\lambda_j(x)$ que também devem ser determinadas.

Note que as equações de vínculo podem ser de forma diferencial, ou mesmo integral. Um exemplo comum de vínculo é o caso do disco de raio R que rola sobre um plano inclinado sem deslizar. **Você consegue** escrever a equação para $g(y, \theta)$, sendo θ o ângulo descrito pelo disco ao redor de seu eixo e y a distância percorrida pelo centro do disco sobre o plano? Calcule as derivadas $\partial g/\partial y$ e $\partial g/\partial \theta$ necessárias para solução do problema.

Vejamos a seguir um exemplo de aplicação do cálculo variacional à minimização com vínculos. Como veremos, aqui bastará introduzir no funcional de minimização um termo com λ constante, devido à natureza do vínculo considerado.

Problema de Dido. Encontre a curva $y(x)$ com comprimento dado l que corresponda à maior área, considerando a região contida entre a curva e o eixo x , entre os pontos com $x = -a$ e $x = a$. (Veja a Fig. 6-8 do Marion.) Aqui queremos *minimizar* a integral

$$A = \int dA = \int_{-a}^a y dx$$

mantendo *fixa* a integral

$$l = \int dl = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

De acordo com nossa discussão acima, vamos considerar a extremização de

$$I = \int_{-a}^a [f(y, y'; x) + \lambda g(y, y'; x)] dx,$$

sendo $f = y$, $g = \sqrt{1 + y'^2} - l/2a$ (de forma que $\int g dx = 0$) e satisfazendo $y(-a) = y(a) = 0$. Como anteriormente, implementamos a condição $\delta I = 0$ para uma variação qualquer δy ,

obtendo a equação

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \lambda \left[\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial y'} \right) \right] = 0, \quad (7)$$

que deve ser satisfeita pela solução $y(x)$. Note que aqui não usamos o multiplicador como função $\lambda(x)$, mas sim como um parâmetro λ constante, pois a condição de vínculo é dada por uma integral. (Em particular, a condição pode ser imposta igualando a zero a derivada de I em relação a λ , como no caso usual de minimização de funções com vínculo.)

Substituindo as derivadas de f e g em (7), temos

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x - c_1,$$

sendo c_1 uma constante de integração. Fazendo a integral, temos

$$y = \mp \sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2} + c_2,$$

onde c_2 é outra constante de integração. A solução é dada, então, pela curva

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2,$$

i.e., um círculo de raio λ com centro em (c_1, c_2) . Impondo $y(-a) = y(a) = 0$ e supondo um semi-círculo, temos $c_1 = c_2 = 0$ e $\lambda = a$. (Nesse caso, temos necessariamente que satisfazer $a = l/\pi$.)

2 Princípio de Hamilton e Equações de Lagrange

O princípio de Hamilton, ou de *mínima ação*,⁵ associa equações que regem a dinâmica clássica —ou newtoniana— à minimização⁶ da integral de um funcional da trajetória, dada por $\mathbf{x}(t)$, e da velocidade associada $\dot{\mathbf{x}}(t)$. Tal integral é a *ação*, e o funcional é a *lagrangiana*, dada por

$$L(x_i, \dot{x}_i) \equiv K - V = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - V(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{m\dot{x}_i^2}{2} - V(x_i), \quad (8)$$

⁵Aspectos históricos e filosóficos relacionados a esse princípio são muito interessantes, veja e.g. discussões sobre princípios variacionais em livros mais avançados, como a Ref. [3], ou a Ref. [4].

⁶Na verdade, como já discutimos, trata-se da *extremização*, ou seja a busca de uma condição de estacionaridade, ou variação nula, que pode estar associada a um mínimo ou máximo.

ou seja, a diferença entre as energias cinética e potencial. Note que indicamos de maneira simplificada a dependência nas coordenadas x_i da posição, i.e. do vetor $\mathbf{x}(t) = (x, y, z)$, e \dot{x}_i da velocidade. A ação é dada pela integral da lagrangiana no tempo

$$S \equiv \int L dt.$$

Ao exigirmos que a trajetória física corresponda a um extremo da ação, i.e. que seja dada por $\delta S = 0$, vamos obter as **Equações de Lagrange** para o movimento do sistema. São elas

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, \quad (9)$$

para $i = 1, 2, 3$. **Você consegue** derivar essas equações, seguindo o procedimento que introduzimos acima para o cálculo variacional? Claro que sim, né! Basta substituir $y(x)$ por $x(t)$ nas contas que fizemos, como já tínhamos adiantado.

Mas então as equações de movimento são as de Lagrange, ou as de Newton? Como veremos, as equações acima são equivalentes às de Newton, mas sua formulação é mais geral. Considere os seguintes exemplos.

Oscilador Unidimensional. Tomando $K = m\dot{x}^2/2$ e $V = kx^2/2$ em (8) e (9), temos

$$m\ddot{x} = -kx,$$

reproduzindo a segunda lei de Newton! Ok, é reconfortante, mas será que valeu a pena todo o investimento que fizemos (em estudar extremização de funcionais, etc.)?

Pêndulo Simples. Sendo m a massa, l o comprimento do fio e θ o ângulo com a vertical, temos $K = ml^2\dot{\theta}^2/2$ e $V = mgl(1 - \cos\theta)$, supondo altura nula quando o pêndulo estiver na vertical. Procedendo como acima, mas considerando as funções $\theta(x)$ e $\dot{\theta}(x)$ no lugar de x e \dot{x} , a Eq. (9) fornece

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0.$$

O resultado está em acordo com a segunda lei de Newton, como acima, e note que não precisamos nos preocupar com a representação vetorial das forças do problema (ou sequer com a existência de forças!) nem com as sutilezas do sistema de coordenadas! De fato, temos um funcional L de uma certa função do tempo $\theta(t)$ e determinamos qual deve ser essa função para que sua variação $\delta\theta$ corresponda a um ponto estacionário da ação S , i.e. a integral temporal do funcional $L(\theta, \dot{\theta})$. Simples assim!

Como visto acima, a formulação lagrangiana é poderosa e muito geral, podendo ser escrita para **coordenadas generalizadas** quaisquer, digamos q_j , $j = 1, \dots, n$, e suas derivadas temporais \dot{q}_j . A escolha de tais coordenadas é totalmente livre, desde que sejam suficientes para descrever o movimento do sistema. Se desejável, tais coordenadas podem ser depois relacionadas às cartesianas x_i , por exemplo. Claramente, o formalismo não envolve qualquer cuidado especial com o tipo de coordenada escolhida (se tem unidade de comprimento ou não, etc.) pois a discussão foi centrada na variação $\delta q(t)$ e seu efeito sobre a variação da lagrangiana δL e da ação δS . O tratamento é totalmente geral. Podemos enunciar, portanto, o *Princípio de Hamilton* de maneira mais ampla:

A dinâmica de um sistema descrito pela lagrangiana $L(q_j, \dot{q}_j)$ —em termos das coordenadas generalizadas $q_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ — será dada pelas n *Equações de Lagrange* relativas a tais coordenadas

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Como anteriormente, o movimento será totalmente determinado a partir das condições iniciais, i.e. os valores de $q_j(0)$ e $\dot{q}_j(0)$. Podemos notar que a lagrangiana é uma função *escalar*, e portanto não se altera se mudarmos o sistema de coordenadas (por exemplo, de cartesianas para esféricas). Da mesma forma, o tratamento não exige conhecimento sobre as *forças* atuando no sistema, apenas que elas estejam associadas a uma energia potencial conhecida. Será possível, também, considerar casos com *vínculos* entre as coordenadas, como fizemos anteriormente, em nossa introdução ao cálculo variacional. Vejamos mais alguns exemplos.

Partícula no Interior de Cone. Considere uma partícula de m se movendo sobre a superfície (lisa) interna de um cone (reto, circular, com vértice em $x = y = z = 0$ e “virado” para cima) de meio ângulo α , sujeita à força gravitacional. Encontre as Eqs. de Lagrange para o movimento, escolhendo convenientemente as coordenadas generalizadas e considerando os vínculos que elas devem satisfazer.

Escolhendo coordenadas cilíndricas ρ , θ , z , temos

$$L(\rho, \theta, z, \dot{\rho}, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{m}{2} \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \right) - mgz.$$

O fato de a partícula estar restrita a se mover sobre a superfície do cone implica o vínculo $\tan \alpha = \rho/z$, que pode ser usado para eliminar a coordenada z do problema, fornecendo as

equações de movimento para θ e ρ . Para a coordenada θ , temos simplesmente que $m\rho^2\dot{\theta}$ é uma constante. Mas essa é a expressão do momento angular ao redor do eixo z , ou seja, a constante é dada pela componente L_z do momento angular. Para a coordenada ρ , temos

$$m\ddot{\rho} - \frac{L_z^2}{m\rho^3} \sin^2 \alpha + mg \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Note que o momento angular total pode não ser constante, e que a equação para ρ pode não corresponder a uma *cônica* (definida como intersecção da superfície do cone com um plano), como tínhamos no problema de Kepler. De fato, esse nem é um problema de força central. Mesmo assim, podemos verificar que há uma solução de movimento circular uniforme, i.e. ρ , z e $\dot{\theta}$ constantes, correspondendo a momento angular total constante $L_z = m\rho^2\dot{\theta}$. Nesse caso, para um dado valor da altura z_0 , o raio do movimento circular será $\rho_0 = z_0 \tan \alpha$. **Qual deve ser** então a velocidade angular (constante) $\dot{\theta}$? **Desafio:** a órbita circular será estável? (Suponha uma pequena variação no raio, $\rho = \rho_0 + \epsilon$, sem que $\dot{\theta}$ sofra variação e verifique que o raio oscilará ao redor do valor ρ_0 com frequência a ser determinada. O que acontece na coordenada z ?)

Pêndulo com Suporte Giratório. Um corpo de massa m está ligado a uma corda de comprimento b , que por sua vez está presa a um aro circular de raio a no plano vertical (que tomaremos como o plano xy , com origem no centro do círculo). O aro gira no sentido anti-horário com velocidade angular constante ω (ver Fig. 7-3 do Marion). Obtenha as equações para as coordenadas x e y do corpo, e para o ângulo θ que o pêndulo faz com a vertical.

Apesar do arranjo complicado, basta relacionar x e y ao ângulo θ , substituir tais relações na lagrangiana

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

e obter a equação de movimento para θ , que então fornecerá as soluções $x(t)$ e $y(t)$. Assim, partindo de $x = a \cos \omega t + b \sin \theta$ e $y = a \sin \omega t - b \cos \theta$, obtemos

$$\ddot{\theta} = \frac{\omega^2 a}{b} \cos(\theta - \omega t) - \frac{g}{b} \sin \theta,$$

de onde pode ser encontrada $\theta(t)$. Note que o caso $\omega = 0$ corresponde ao pêndulo usual.

Pêndulo no Trem. Considere um pêndulo de comprimento l (com uma massa m) suspenso no teto de um vagão de trem em movimento com aceleração a constante. Qual será a

frequência para pequenas oscilações ao redor da posição de equilíbrio θ_e do pêndulo (sendo θ o ângulo com a vertical)?

Primeiramente, vamos escrever a lagrangiana

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy,$$

sendo x e y respectivamente as coordenadas horizontais e verticais de m . Podemos tomar $y = 0$ no teto, i.e. $y = -l \cos \theta$, e notar que $x(t)$ é igual a $l \sin \theta$ mais o deslocamento do trem acelerado, dado por $\Delta x = v_0 t + at^2/2$. Substituindo essas expressões em L , teremos um problema com uma única coordenada, o ângulo θ , com equação de movimento dada por

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{a}{l} \cos \theta.$$

(Você consegue obter essa equação de movimento a partir da lagrangiana acima?)

Em particular, a posição de equilíbrio θ_e não é $\theta = 0$, devido à aceleração do trem, e pode ser obtida impondo $\ddot{\theta} = 0$. Temos, assim, $\theta_e = \tan^{-1}(-a/g)$, que se anula apenas para o caso do trem parado ou com velocidade constante.⁷ Vamos supor agora um pequeno deslocamento em relação a θ_e , ou seja, $\theta(t) = \theta_e + \eta(t)$, com $\eta(t)$ pequeno. Já que θ_e é uma constante, temos $\ddot{\eta} = \ddot{\theta}$ e portanto a equação de movimento para η é

$$\ddot{\eta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta_e + \eta) - \frac{a}{l} \cos(\theta_e + \eta) \approx -\frac{g}{l} (\sin \theta_e + \eta \cos \theta_e) - \frac{a}{l} (\cos \theta_e - \eta \sin \theta_e),$$

onde a última passagem foi obtida realizando expansão de Taylor até primeira ordem em η . Rearranjando os termos e usando a expressão para θ_e , chegamos (**verifique!**) à equação de movimento para η pequeno

$$\ddot{\eta} = -\frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{l} \eta.$$

Portanto, nossa solução corresponde a uma oscilação simples ao redor de θ_e , com frequência angular dada por $\omega^2 = \sqrt{a^2 + g^2}/l$. No caso $a = 0$ temos o pêndulo usual, i.e. $\omega = \sqrt{g/l}$, como esperado!

Partícula no Interior de Parabolóide. Uma partícula desliza sobre uma haste com formato de uma parábola $z = c\rho^2$ (onde ρ é a distância em relação ao eixo z), que gira ao

⁷Você provavelmente já tinha encontrado esse resultado antes, através da análise do diagrama de forças para m e considerando que a resultante deve produzir aceleração igual à do trem, o que talvez não tenha parecido muito claro, certo?

redor de seu eixo de simetria com velocidade angular ω . Suponha que a partícula realiza um movimento circular uniforme com raio R . Qual o valor de c , nesse caso? Note a semelhança com o exemplo (desenvolvido acima) da partícula no interior do cone: aqui temos a partícula presa a uma haste que gira, mas é como se ela estivesse solta e realizasse um movimento circular na superfície interna de um parabolóide fixo!

Vamos escrever a lagrangiana em coordenadas cilíndricas, como no caso do cone visto acima, mas notando que a velocidade angular $\dot{\theta} = \omega$ é uma constante

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \omega^2 + \dot{z}^2) - mgz = \frac{m}{2} [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \omega^2 + (2c\rho\dot{\rho})^2] - mgc\rho^2,$$

onde também substituímos a expressão para z em função de ρ . A partir da Equação de Lagrange, temos a seguinte equação de movimento para ρ (**verifique!**)

$$\ddot{\rho} (1 + 4c^2 \rho^2) + \dot{\rho}^2 (4c^2 \rho) + \rho (2gc - \omega^2) = 0.$$

Agora vamos impor o caso do movimento circular com $\rho = R$, o que implica $\ddot{\rho} = \dot{\rho} = 0$. A equação acima torna-se, então, simplesmente

$$R (2gc - \omega^2) = 0$$

e temos o resultado $c = \omega^2/2g$.

Polia Dupla. Considere um arranjo em que uma das extremidades de uma corda de comprimento l_1 , que passa por uma polia ideal, está ligada a uma massa m_1 e a outra extremidade está ligada a outra polia ideal, pela qual passa uma corda de comprimento l_2 , com massas m_2 e m_3 em suas extremidades. Determine as equações de movimento para as coordenadas dos três corpos. Será útil definir as coordenadas x e y , respectivamente dos corpos m_1 e m_2 em relação aos centros das polias 1 e 2. (Ver Fig. 7-6 do Marion.)

Podemos identificar as coordenadas das massas m_1 , m_2 e m_3 respectivamente como x , $l_1 - x + y$ e $l_1 - x + l_2 - y$. (Note que tais coordenadas são em relação à polia 1, e portanto serão tomadas com sinal negativo para a energia potencial V .) Substituindo as expressões usuais para K e V temos a lagrangiana

$$\frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{x} - \dot{y})^2 + \frac{m_3}{2} (\dot{x} + \dot{y})^2 + m_1 g x + m_2 g (l_1 - x + y) + m_3 g (l_1 - x + l_2 - y).$$

Teremos, então, equações de Lagrange para determinação das coordenadas x e y , a partir das quais podemos obter as coordenadas das três massas. **Você consegue** obter essas

duas equações? Isolando \ddot{y} em uma delas e substituindo na outra, temos \ddot{x} , a aceleração (constante) da massa m_1

$$\ddot{x} = \frac{(m_2 + m_3)(m_1 - m_2 - m_3)}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} g,$$

e assim por diante. Como esperado, \ddot{x} será nula se $m_1 = m_2 + m_3$. Por outro lado, note que $m_1 \rightarrow g$ (queda livre) no limite em que $m_2 = m_3 \rightarrow 0$ (**verifique!**).

Nos exemplos acima, vimos que a partir da lagrangiana de um sistema podemos obter as equações de movimento para as coordenadas de uma partícula, de forma direta ou por meio de coordenadas generalizadas, inclusive tratando várias partículas ao mesmo tempo.

3 Sistemas com Vínculos

Vamos considerar vínculos entre as coordenadas generalizadas, representados por uma ou mais condições de vínculo do tipo $g(q_i; t) = 0$, ou seja, vínculos holonômicos.⁸ Note que tais vínculos já estavam presentes em alguns dos exemplos acima, mas optamos por impor a condição de vínculo explicitamente na formulação do problema, como maneira de reduzir os graus de liberdade, diminuindo o número de equações de movimento. Fizemos isso tanto no início, ao escrever a lagrangiana, quanto após a obtenção das equações de movimento, como no exemplo do parabolóide, pois pode ser mais vantajoso manter a independência entre as coordenadas até quase o final.

Vejam agora como tratar o vínculo de maneira mais geral, a partir da inclusão de um termo $\lambda(t) g(q_i, \dot{q}_i; t)$ na lagrangiana, como fizemos anteriormente para o cálculo variacional com multiplicadores de Lagrange indeterminados. Como já argumentado, o procedimento é claramente válido, pois irá corresponder a adicionar um termo “nulo” à lagrangiana, e pode ser conveniente, em alguns casos, para dar um significado físico à função $\lambda(t)$. Vamos seguir

⁸Uma condição de vínculo desse tipo pode também ser dada em termos das derivadas \dot{q}_i , se for possível integrar a expressão exatamente, i.e. se ela for da forma $\sum_i A_i \dot{q}_i + B$ com $A_i(t) = \partial g / \partial q_i$ e $B(t) = \partial g / \partial t$, o que implica

$$\sum_i A_i(t) \dot{q}_i + B(t) = \sum_i \frac{\partial g}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{dg}{dt} = 0,$$

e portanto fornece $g(q_i, t) - \text{const} = 0$. Esses vínculos são ditos *semi-holonômicos*.

de perto o que já fizemos na Seção 1.2. Consideremos, então, a lagrangiana

$$L(q_i, \dot{q}_i, \lambda; t) = K(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i, \dot{q}_i) + \lambda(t) g(q_i, \dot{q}_i; t).$$

Teremos então as equações de Lagrange para q_i considerando as coordenadas como independentes mas incluindo λ —veja as Eqs. (6)— ou seja

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Claramente, se tivermos m vínculos, dados pelos funcionais $g_k(q_i, \dot{q}_i; t)$, $k = 1, \dots, m$, teremos m termos adicionais na lagrangiana, e conseqüentemente uma soma sobre os respectivos termos proporcionais a $\lambda_k(t)$ na equação acima.⁹ O terceiro termo da equação seria, nesse caso, dado pela grandeza

$$Q_i \equiv \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i}, \quad (11)$$

que chamamos de *força generalizada de vínculo* relativa à coordenada q_i . Para ilustrarmos o papel desse termo, lembre-se de que no caso unidimensional para coordenada x , sendo $m\dot{x}^2/2$, o segundo termo da Eq. de Lagrange será $-m\ddot{x}$ e o primeiro $-dV/dx$, supondo uma energia potencial $V(x)$. Ou seja, sem o terceiro termo teríamos simplesmente a equação $-dV/dx = m\ddot{x}$, que é a segunda lei de Newton para partícula de massa m se movendo em uma dimensão sob o potencial $V(x)$ —associado à força conservativa $F = -dV/dx$, como de costume— sem vínculos. **Certo!?** Considerando o termo Q_x , no caso com vínculo, teríamos então a equação de movimento $m\ddot{x} = F + Q_x$, motivando a associação de Q_x a uma força devido ao vínculo. Note porém que a expressão (11) não precisa necessariamente corresponder a uma força propriamente dita, como veremos nos exemplos a seguir.

Disco em Plano Inclinado. Este exemplo foi mencionado anteriormente, temos um disco de massa M e raio R que rola sem delizar sobre um plano inclinado de α com a horizontal. (Ver Fig. 6-7 do Marion.) Considerando as coordenadas y (distância percorrida pelo centro do disco desde o ponto mais alto sobre o plano inclinado) e θ (deslocamento angular em

⁹Se tivermos n coordenadas generalizadas q_i e m vínculos g_k entre elas, naturalmente teremos $n + m$ graus de liberdade “independentes”, correspondendo a $n + m$ funções de t que teremos que encontrar, a partir das n equações de movimento e das m equações de vínculo. Ou seja, pode parecer complicado, mas a conta “fecha”!

relação à normal ao plano), teremos o vínculo $y = R\theta$, e a lagrangiana¹⁰

$$L(y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{M}{2} \dot{y}^2 + \frac{MR^2}{4} \dot{\theta}^2 + Mg(y - l) \sin \alpha, \quad (12)$$

sendo l o comprimento total da rampa, de forma que a energia potencial se anule quando o disco estiver no ponto mais baixo. Aqui não podemos considerar y e θ como independentes, claramente. Usando diretamente o vínculo temos $\dot{\theta} = \dot{y}/R$. Substituindo acima teremos a Eq. de Lagrange para y (**verifique!**)

$$\ddot{y} = \frac{2g \sin \alpha}{3} = R\ddot{\theta}, \quad (13)$$

onde também incluímos (através do vínculo) o resultado para $\ddot{\theta}$. Trata-se de um movimento uniformemente acelerado. Para a coordenada y , a aceleração é menor (por um fator $2/3$) do que teríamos para uma partícula pontual de massa M , certo? Deve surgir, portanto, uma força de vínculo nessa coordenada que explique a diferença.

Vamos voltar à Eq. (12), mas agora sem considerar y e θ vinculadas, usando o truque acima, i.e., tomando a “lagrangiana” $L(y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}, \lambda) = L(y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}) + \lambda g(y, \theta)$, com $g(y, \theta) = y - R\theta$, e considerando y , θ e λ como “independentes”. Podemos supor que a equação para $y(t)$ terá, agora, uma força contrária a $Mg \sin \alpha$, devido ao vínculo, de forma a justificar a aceleração obtida acima. Vejamos. Usando (10) e (11), temos as três Eqs. de Lagrange (**verifique!**)

$$\begin{aligned} Mg \sin \alpha - M\ddot{y} + \lambda &= Mg \sin \alpha - M\ddot{y} + Q_y = 0, \\ -\frac{MR^2}{2} \ddot{\theta} - \lambda R &= -\frac{MR^2}{2} \ddot{\theta} + Q_\theta = 0, \\ g(y, \theta) &= y - R\theta = 0. \end{aligned}$$

¹⁰Você já sabe, mas não custa relembrar o conceito de *momento de inércia*, que vem de considerar cada elemento de volume de um corpo de massa total M como se fosse uma partícula —correspondendo a uma massa $\delta m(\mathbf{r})$ — com velocidade (tangencial) $\rho\dot{\theta}$, onde ρ é a respectiva distância até o eixo de rotação. Então, a energia cinética total será $\int \delta m(\rho\dot{\theta})^2/2 = I\dot{\theta}^2/2$, com o momento de inércia I dado por

$$I \equiv \int \delta m(\mathbf{r})\rho^2 = \int_{\text{disco}} \frac{M}{\pi R^2} (r dr d\theta) r^2 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2},$$

onde fizemos o cálculo para o disco de densidade uniforme. Da mesma forma, o módulo do momento angular é $L = I\dot{\theta}$ e poderíamos alternativamente escrever a energia cinética como $L^2/2I$ em vez de $I\dot{\theta}^2/2$. Claramente, no problema em questão, trata-se da energia cinética em relação ao centro de massa, apenas.

Substituindo $y = R\theta$ (da terceira equação) na segunda equação, dividindo os dois por R e somando à primeira equação, reobtemos (13), como esperado, mas também temos agora (pela primeira equação, por exemplo)

$$\lambda = Q_y = -\frac{Mg \sin \alpha}{3},$$

confirmando nossa expectativa acima, de uma força de vínculo contrária ao movimento, com $1/3$ do valor da força usual para um corpo no plano inclinado sem vínculo. Note que a “força” Q_θ correspondente será

$$Q_\theta = -\lambda R = \frac{MgR \sin \alpha}{3}$$

e portanto, como havíamos mencionado, não se trata de uma força, mas de uma grandeza com unidades de *torque*.

Vimos então que a solução com incorporação explícita do vínculo é mais direta, mas que usando o procedimento acima para identificação das forças generalizadas de vínculo podemos obter um entendimento mais aprofundado do problema. Outra aplicação interessante do procedimento é em casos para os quais o vínculo pode deixar de valer. De fato, se a função $\lambda(t)$ se anular para um dado valor de t , teremos (por nossa discussão acima) que a condição de vínculo $g(q_i; t) = 0$ não será mais necessariamente satisfeita, já que a contribuição do vínculo será eliminada. Poderemos, assim, identificar de maneira simples quando o vínculo entre as coordenadas de um problema deixará de valer. Vejamos um exemplo.

Partícula sobre Hemisfério. Uma partícula de massa m parte do repouso e desliza sem atrito sobre a superfície de uma semi-esfera de raio a . Determine as forças de vínculo e o ponto em que a partícula “descola” da superfície. (Ver Fig. 7-7 do Marion.)

Considerando as coordenadas r e θ (pois o problema tem simetria azimutal, i.e. é independente do ângulo ϕ) e o funcional de vínculo $g(r, \theta) = r - a$, que é nulo enquanto a partícula estiver em contato com a superfície. Temos a lagrangiana

$$L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta$$

e, a partir de (10), encontramos as equações de movimento (**verifique!**)

$$mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta - m\ddot{r} + \lambda = 0,$$

$$mgr \sin \theta - mr^2\ddot{\theta} - 2mrr\dot{\theta} = 0.$$

Impondo o vínculo $r = a$ na segunda equação acima, obtemos $\ddot{\theta} = (g/a) \sin \theta$, que permite¹¹ determinar $\dot{\theta}$ em função de θ . Substituindo o resultado na primeira equação e usando (11), temos a força de vínculo (**verifique!**)

$$Q_r = \lambda(t) = mg(3 \cos \theta - 2).$$

Vemos então que, enquanto θ aumenta a partir de $\theta = 0$, a força Q_r diminui, até se anular, para $\theta = \theta_0$, sendo $\cos \theta_0 = 2/3$. Nesse ponto a partícula perde contato com a superfície e passa a se movimentar sem vínculo. Note que $Q_r = mg$ quando $\theta = 0$ (força normal igual ao peso), como esperado.

4 Discussão

Para finalizar, vamos demonstrar que a formulação lagrangiana, obtida a partir do cálculo variacional pelo princípio de Hamilton, é de fato equivalente às leis de Newton para descrição do movimento de um ou mais corpos na presença de um potencial V .

Como já demonstramos acima para o caso unidimensional, é simples relacionar as Eqs. de Lagrange para coordenadas cartesianas (sem vínculos) à segunda lei de Newton para tais coordenadas. De fato, temos

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$

para cada coordenada x_i , $i = 1, 2, 3$ (i.e., para x , y e z). Considerando

$$L = K + V = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + V(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 + V(x_i), \quad (14)$$

temos para cada coordenada x_i a equação

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i,$$

¹¹Note que a equação é separável, pois o lado direito só depende de θ e o lado esquerdo pode ser escrito da forma $\ddot{\theta} = d\dot{\theta}/dt = (d\dot{\theta}/d\theta) \dot{\theta}$. Temos, portanto,

$$\int \dot{\theta} d\dot{\theta} = \frac{g}{a} \int \sin \theta d\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}(1 - \cos \theta),$$

onde impusemos a condição inicial $\dot{\theta} = 0$ para $t = \theta = 0$. Infelizmente não podemos usar esse “truque” para integrar completamente a equação e obter $\theta(t)$ de forma simples, mas aqui estamos apenas interessados na expressão para $\dot{\theta}$ em função de θ .

onde F_i é a coordenada i da força associada ao potencial. Ou seja, temos a segunda lei de Newton (!), que também pode ser escrita na forma vetorial

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x}) = \mathbf{F}.$$

Muito bem, mas como ficaria a equivalência no caso de coordenadas generalizadas q_j , como estamos considerando no formalismo lagrangiano? Vamos generalizar o conceito de momento (massa vezes velocidade) para a coordenada q_j e escrever a versão da segunda lei de Newton para essa coordenada, ou seja, algo como $m\ddot{x}_i = F_i$ para as coordenadas retangulares, como acima. Para isso, vamos introduzir o *momento generalizado* p_j associado à coordenada q_j , utilizando a definição

$$p_j \equiv \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}, \quad (15)$$

que equivale à definição usual do momento linear $\mathbf{p} = m\mathbf{x}$ para as componentes x_i , já que a contribuição para a derivada virá do termo $m\dot{x}_i^2/2$ da energia cinética K . Note que, agora, o que estamos chamando de “momento” não terá mais necessariamente dimensão de massa vezes velocidade. Por exemplo, considerando a energia cinética escrita em termos de coordenadas polares $K = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)/2$, temos (pela definição acima) os momentos generalizados $p_r = m\dot{r}$ e $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$. O primeiro tem dimensão de momento e é como se a direção radial correspondesse a um problema unidimensional (como vimos anteriormente no caso da força central), mas o segundo tem dimensão de momento angular. De fato, *é* o momento angular! ok, é o módulo do momento angular, mas não há conexão vetorial direta com a “direção” da coordenada generalizada. No caso geral, vamos escrever as coordenadas cartesianas em termos das coordenadas q_j (respectivamente \dot{x}_i em termos de \dot{q}_j) na expressão usual para a energia cinética K e aplicar a definição (15) para obter p_j .

Podemos também definir o análogo de uma *força generalizada* associada à coordenada q_j , a partir do trabalho δW associado à força \mathbf{F} . Vamos escrever, como acima, a expressão para o trabalho em termos das coordenadas cartesianas e relacionar o resultado às coordenadas generalizadas q_j . Temos

$$\delta W = \sum_i F_i \delta x_i = \sum_{i,j} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i,j} \left(-\frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j,$$

onde definimos a *força generalizada*

$$Q_j \equiv \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (16)$$

associada à coordenada q_j . Note que usamos a notação Q_j , introduzida anteriormente para as forças de vínculo, e que, assim como para a força de vínculo, Q_j não terá necessariamente dimensão de força. O que será sempre válido é que o produto de Q_j por q_j possui dimensão de energia, pois fornece contribuição $Q_j \delta q_j$ para o trabalho δW .

Tendo introduzido versões generalizadas dos conceitos newtonianos de momento e força, vamos agora tentar “improvisar” uma segunda lei de Newton para a coordenada generalizada q_j , algo análogo a $\dot{p}_x = F_x$ para a coordenada cartesiana x . Primeiramente, note que, para conversão entre os dois tipos de coordenadas, vamos considerar $x_i = x_i(q_j, t)$. Portanto, ao tomar derivadas temporais, vale

$$\dot{x}_i = \frac{d}{dt} x_i(q_j, t) = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad (17)$$

o que implica $\partial \dot{x}_i / \partial \dot{q}_j = \partial x_i / \partial q_j$. Das Eqs. (14) e (15) temos, então (**verifique!**)

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_i m \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{i,k} m \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} + \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t}.$$

Vemos que o primeiro termo na soma à direita acima corresponde a Q_j , pela Eq. (16), já que $m \ddot{x}_i = F_i$. Podemos também reconhecer, usando (17), que os outros dois termos equivalem a $\partial K / \partial q_j$. Ou seja, temos no lado direito uma força generalizada efetiva associada à coordenada q_j , e a equação pode ser reescrita como

$$\dot{p}_j = Q_j + \frac{\partial K}{\partial q_j}. \quad (18)$$

Claramente, lembrando (16), o lado direito é igual a $\partial L / \partial q_j$. Note agora que \dot{p}_j foi obtido de $\partial K / \partial \dot{q}_j$ e que V não depende de \dot{q}_j (pois x_i depende apenas de q_j , não de \dot{q}_j). Juntando tudo,¹² temos que a Eq. de Lagrange para a coordenada q_j

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

é equivalente à segunda lei de Newton a ela associada, dada em (18). Ufa!

¹²Só para “constar”: estamos considerando o caso de coordenadas generalizadas, mas com energia cinética obtida a partir da usual, i.e. $K = mv^2/2$ em coordenadas cartesianas, e energia potencial que depende apenas de \mathbf{x} . Além disso, fizemos a suposição de uma dependência $x_i(q_j, t)$ ao passar das coordenadas cartesianas para as generalizadas.

Se você seguiu todos os passos da discussão acima: parabene-se! Se não seguiu, não tem problema, aqui vai um resumo. Foi relativamente simples demonstrar que as Eqs. de Lagrange se reduzem à segunda lei de Newton para coordenadas cartesianas. Para coordenadas generalizadas q_j , por outro lado, foi bem complicado definir análogos dos conceitos newtonianos (momento linear e força), deduzir a segunda lei de Newton correspondente, a Eq. (18), e só então verificar que ela é equivalente à Eq. de Lagrange para q_j . Isso tudo para o caso sem vínculos! Concluindo, o formalismo de Lagrange é equivalente à descrição newtoniana do movimento, mas não requer a consideração direta de forças e presta-se muito melhor ao estudo de casos mais gerais, e.g. incluindo coordenadas generalizadas ou vínculos entre as coordenadas do problema. Isso porque a lagrangiana é uma função escalar, definida em termos da energia, que não se altera por uma mudança de variáveis e não precisa que sejam especificadas as forças (vetoriais) do problema. Do ponto de vista filosófico, enquanto a mecânica newtoniana envolve a consideração de uma força e de seu conseqüente efeito sobre o sistema, na formulação lagrangiana há um princípio —ou *propósito*, de minimizar a ação— que deve ser seguido e determina o movimento dos corpos estudados.

Referências

- [1] “Classical Dynamics of Particles and Systems”, Stephen T. Thornton & Jerry B. Marion (Thomson Learning, quinta edição, 2004).
- [2] “Classical Mechanics”, Tom W.B. Kibble & Frank H. Berkshire (Imperial College Press, quinta edição, 2004).
- [3] “Mecânica Analítica”, Nivaldo Lemos (Livraria da Física, segunda edição, 2023).
- [4] “Classical Mechanics”, Herbert Goldstein (Addison-Wesley, segunda edição, 1994).