MAT0122 - Álgebra Linear I
Lista 5
2023

1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. mostre que:

   (a) Tudo subconjunto LI de V que contém n vetores é uma base de V.

   (b) Todo subconjunto gerador de V que contém n vetores é uma base de V.

2. Determine uma base e a dimensão de cada subespaço W do espaço vetorial V.

   (a) $V = \mathbb{R}^4$; $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ e } 2x + y + 2z + t = 0\}$;

   (b) $V = \mathbb{R}^4$; $W = [(1, 1, 2, 1), (-1, 2, -2, 1), (1, 3, 1, 2), (1, 1, 1, 1)]$;

   (c) $V = P_3(\mathbb{R})$; $W = \{p(X) \mid p(1) = p(-1) = 0\}$;

   (d) $V = M_n(\mathbb{R})$; W o conjunto das matrizes traço nulo, isto é,

   $$W = \{A = (a_{ij}) \mid a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 0\}.$$

3. Verifique que o conjunto $B = \{g_1(t), g_2(t), g_3(t)\} \subset P_2(\mathbb{R})$, onde $g_1(t) = t^2 + t + 1$, $g_2(t) = t^2 - t - 2$ e $g_3(t) = t - 1$, é uma base de $P_2(\mathbb{R})$. Determine as coordenadas do vetor $p(t) = t + 11t + 3$ em relação à base B.

4. Determine, se houver, uma base de $\mathbb{R}^4$ contida no conjunto

   $$S = \{(1, 1, -1, 1), (3, 1, 2, 1), (5, 3, 0, 3), (4, 0, 1, 2), (1, 2, 1, 3)\}.$$

5. Estenda o conjunto $S = \{(1, -1, -1, 3), (2, 5, 2, -6)\} \subset \mathbb{R}^4$ a uma base de $\mathbb{R}^4$.

6. Determine uma base de $M_2(\mathbb{R})$, formada por matrizes A_1, A_2, A_3 e A_4 que satisfazem $A_i^2 = A_i$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$.

7. Seja V um espaço vetorial e $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de V. Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ não todos nulos. Mostre que

   $$W = \{v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots x_nv_n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\},$$

   é um subespaço de V de dimensão $n - 1$.

8. Sejam $V = M_n(\mathbb{R})$. Sejam W o subespaço de V constituído pelas matrizes simétricas e U o subespaço de V constituído pelas matrizes anti-simétricas. Mostre que $\dim W = \dfrac{n(n+1)}{2}$ e $\dim U = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Exiba uma base de cada um dos subespaços. Mostre que $V = W \oplus U$.

9. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (-1, 0, 1, 2), v_2 = (3, 4, -2, 5)$ e $v_3 = (1, 4, 0, 9)$. Determine um sistema linear homogêneo tal que W é exatamente o conjunto solução desse sistema.

10. Sejam $c_0, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ com $c_i \neq c_j$ se $i \neq j$. Para cada $j = 0, 1, ..., n$, considere o polinômio $p_j(t) \in P_n(\mathbb{R})$ definido por

$$p_j(t) = \frac{(t-c_0)(t-c_1)\cdots(t-c_{j-1})(t-c_{j+1})\cdots(t-c_n)}{(c_j-c_0)(c_j-c_1)\cdots(c_j-c_{j-1})(c_j-c_{j+1})\cdots(c_j-c_n)}.$$

   (a) Observe que $p_j(c_i) = 0$ se $i \neq j$ e $p_j(c_j) = 1$. Use esse fato para mostrar que $B = \{p_0(t), p_1(t), \cdots, p_n(t)\}$ é LI (e portanto é uma base de $P_n(\mathbb{R})$.)

   (b) Escreva um polinômio $p(t) \in P_n(\mathbb{R})$ como combinação linear da base B.

   (c) Dados $a_0, a_1, \cdots, a_n$ com $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$ e $b_0, b_1, \cdots b_n \in \mathbb{R}$, mostre que existe um polinômio $p(t) \in P_n(\mathbb{R})$ tal que $p(a_i) = b_i$ para todo $i = 0, 1, \cdots n$. (A fórmula obtida no item (c) chama-se **Fórmula de Interpolação de Lagrange**.)

11. Use o exercício anterior para determinar $p(t) \in P_3(\mathbb{R})$ com $p(0) = 1, p(1) = 2, p(2) = 3$ e $p(3) = 0$.

12. É possível existir uma base de $P_5(\mathbb{R})$ tal que nenhum dos polinômios dessa base tenha grau 2? Existe uma base de $P_5(\mathbb{R})$ com todos os polinômios da base com grau igual a 5?

13. Seja V um espaço vetorial tal que dado $n > 0$ existe um subconjunto LI de V com n vetores. Mostre que a dimensão de V não é finta.

14. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ considere os subespaços: $U = \{(x, y, z) \mid x = 0\}$, $V = \{(x, y, z) \mid y - 2z = 0\}$ e $W = [(1, 1, 0), (0, 0, 2)]$. Determine uma base de cada um dos subespaços: $U, V, W, U \cap W, U \cap V, U + V$ e $U + W$.

15. Sejam U e W subespaços de dimensão 5 de $\mathbb{R}^9$. Mostre que $U \cap W \neq \{0\}$.

16. Seja V um espaço vetorial e sejam U e W subespaços de dimensão finita de V. Mostre que $\dim(U + W)$ é finita e que

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

17. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n e sejam U e W subespaços de V. Mostre que as afirmações a seguir são equivalentes:

   (a) $V = U \oplus W$.

   (b) Se B é uma base de U e C é uma base de W então $B \cap C = \emptyset$ e $B \cup C$ é uma base de V.

   (c) $V = U + W$ e $\dim U + \dim W = n$.

18. Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Seja L_i a i-ésima linha de A considerada como um vetor de R^n e seja C_j a j-ésima coluna de A considerada como um vetor de R^m. Mostre que

$$\dim[L_1, L_2, \cdots, L_m] = \dim[C_1, C_2, \cdots, C_n].$$

   (**DICA:** Reduza a matriz A à forma escalonada. Quando se está escalonando através de operações elementares nas linhas, são feitas combinações lineares das linhas. Toda linha não nula tem um pivô! As colunas LI são as que dão origem a colunas com pivô após o escalonamento.)