Resolução: Lista de Exercícios 1

Resoluções: Monitor Alessandro de Lara alara@if.usp.br

- **Exercício 1:** O tamanho de um núcleo pode ser determinado por:
  (a) espalhamento de elétrons;
  (b) pelos níveis de energia de um átomo muonico (atómo de hidrogênio com um muon ao invés de um eletron).

  Discuta qual quantidades devem ser medidas em cada uma dessa opções e como elas estão relacionadas ao raio do núcleo. Para o:
  (a) considere o fator de forma;
  (b) considere que o próton como uma esfera uniformemente carregada.

$$V\left(r\right)=\begin{cases}-\frac{e^2}{2R^3}\left(3R^2-r^2\right), 0<r\leqslant R\\ -\frac{e^2}{r}, r>R\end{cases}$$

! **Dica:** Use que:

$$\Delta E=\left\langle \Phi_0\left|H'\right|\Phi_0\right\rangle,\ \Phi_0=\left(\frac{1}{\pi a_\mu^3}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{r}{a_\mu}},\ R\sim 10^{-12}\text{ cm},\ a_\mu\sim 10^{-10}\text{ cm}$$

E portanto:

$$e^{-\frac{2r}{a_\mu}}\approx\left(1-\frac{2r}{a_\mu}\right)$$

RESOLUÇÃO: Nessa questão são abordadas duas formas de obter o valor do raio do núcleo: a) A análise da curva de distribuição angular experimental do espealhamento elástico gera o fator de forma que é defindo por:

$$F(q^2)=\frac{d\sigma_{exp}}{d\sigma_{pontual}} \tag{1}$$

O raio do núcleo é extraído do fato de forma pela transformada de Fourrier da distribuição da carga:

$$F(q^2)=\int e^{i\vec{q}.\vec{r}}\rho(r)d^3r \tag{2}$$

Expandindo o termo exponencial encontra-se:

$$F(q^2)=\int\left(1+i\vec{q}.\vec{r}-\frac{1}{2}\left(\vec{q}.\vec{r}\right)^2+...\right)\rho(r)d^3r \tag{3}$$

Pela simplicação dos termos e a substituição do termo d^3r pelo jacobinano em coordenadas esféricas ($r^2drsin\theta d\theta d\phi$), encontra-se:

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int \left(1-\frac{1}{2}\left(\vec{q}.\vec{r}\right)^2\right)\rho(r)d^3r \\ F(q^2) &= \int \rho(r)d^3 + \frac{1}{2}\int \left(\vec{q}.\vec{r}\right)^2\rho(r)d^3r \\ F(q^2) = 1 + \frac{1}{2}&\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(qrcos\theta\right)^2\rho(r)r^2drsin\theta d\theta d\phi \end{aligned} \tag{4}$$

Lembrando que a posição quadrática esperada é calculada por:

$$< r^2 >= 4\pi\int_0^{\infty} r^2\rho(r)dr \tag{5}$$

Assim, a expressão do fator de forma pode ser resumida para:

$$\begin{aligned} F(q^2) &= 1 + \frac{1}{2}q^2\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\infty}r^2\rho(r)dr\int_0^{\pi}cos^2\theta sin\theta d\theta \\ F(q^2) &= 1 + \frac{1}{2}q^2(2\pi)\frac{< r^2 >}{4\pi}\int_0^{\pi}cos^2\theta sin\theta d\theta \end{aligned} \tag{6}$$

A integral em termos $d\theta$ é facilemnte resolvida pela substituiçao $u = cos\theta$, com a correta troca de limite de integração, para -1 e 1. Asssim:

$$F(q^2) = 1 + \frac{< r^2 >}{4}q^2\left[\frac{cos^3\theta}{3}\right]_{cos\theta=-1}^{cos\theta=1} \tag{7}$$

Por fim:

$$F(q^2) = 1 + \frac{< r^2 >}{4}q^2\left(\frac{2}{3}\right) \therefore F(q^2) = 1 + \frac{< r^2 >}{6}q^2 \tag{8}$$

b) Nesse caso o raio nuclear será obtido pela diferença de energia entre dois niveis. Consideramos o estado fundamental como gerado pelo pontencial de uma esfera carregada e o primeiro estado excitado pelo potencial de carga pontual. Assim , a diferença de energia será calculada pela operação:

$$\Delta E =< \Phi_0\left|H'\right|\Phi_0' > \tag{9}$$

Considerando todas as simestrias esféricas do problema e que o potencial é de natureza radial, essa diferença de energia será calculada pela integral:

$$\Delta E = 4\pi\int_0^{R}\left|\Phi_0\right|^2 H'r^2dr \tag{10}$$

Adotando uma das soluções de onda:

$$\Phi_0 = \left(\frac{1}{\pi a_\mu^3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{a_\mu}} \tag{11}$$

E o hamiltoninano pela ação do potencial:

$$H' - \frac{e^2}{2R^3}\left(3R^2 - r^2\right) \tag{12}$$

Encontra-se:

$$\begin{aligned} \Delta E &= 4\pi \int_0^R \left(\left(\frac{1}{\pi a_\mu^3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{a_\mu}}\right)^2 \left(-\frac{e^2}{2R^3}\left(3R^2 - r^2\right)\right) r^2 dr \\ \Delta E &= 4\pi \left(\frac{1}{\pi a_\mu^3}\right) \cdot \int_0^R \left(e^{-\frac{2r}{a_\mu}}\right) \left(-\frac{e^2}{2R^3}\left(3R^2 - r^2\right)\right) r^2 dr \end{aligned} \tag{13}$$

Usando a expansão proposta no enunciado $e^{-\frac{2r}{a_\mu}} \approx \left(1 - \frac{2r}{a_\mu}\right)$:

$$\Delta E = 4\pi \left(\frac{1}{\pi a_\mu^3}\right) \cdot \int_0^R \left(1 - \frac{2r}{a_\mu}\right) \left(-\frac{e^2}{2R^3}\left(3R^2 - r^2\right)\right) r^2 dr \tag{14}$$

Resumindo os termos e integrando, encontra-se:

$$\Delta E = \frac{2}{5}\left(\frac{e^2}{2a_\mu}\right)\left(\frac{R}{a_{mu}}\right)^2 \tag{15}$$

- **Exercício 2:** Considere a distribuição angular (Figura 1) para o espalhamento de elétrons pelos núcleos de ^{16}O e ^{12}C, figura abaixo. Determine o raio desses núcleos considerando o critério de resolução de Rayleigh $\theta = sin^{-1}\left(1.22\frac{\lambda}{D}\right)$ e pelos máximos e mínimos da difração: $\Delta\left(qR\right) \simeq \pi$ e com o momento transferido dado por: $|\overrightarrow{q}| = q = 2ksin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\frac{p}{\hbar}sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2}{\lambda}sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

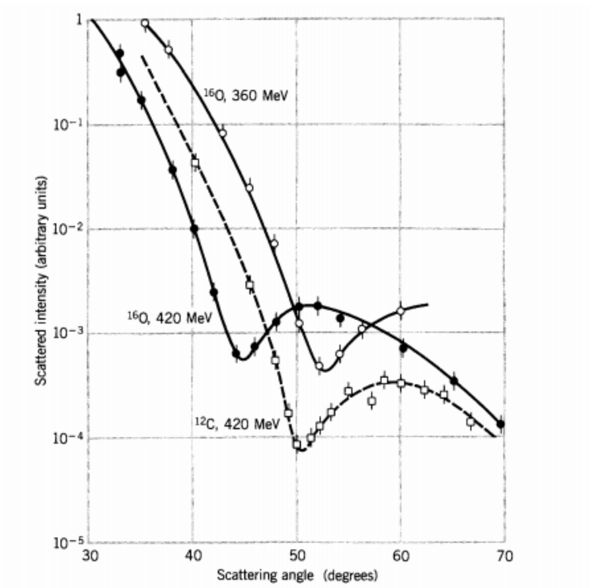

Figura 1: Para o **Exercício 2**.

RESOLUÇÃO: Seguindo o critério de resolução de Rayleigh:

$$sin\theta = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{16}$$

De forma que o raio nuclear poderia ser obtido pela expressão:

$$D = \frac{1.22\lambda}{sin\theta} \rightarrow R = \frac{1.22\lambda}{2sin\theta} \tag{17}$$

Esta expressão pode ser rescrita em termos da Energia, considerando a equação de De Broglie: $E = \frac{hc}{\lambda}$, assim:

$$D = \frac{1.22\lambda}{sin\theta} \rightarrow R = \frac{1.22\frac{hc}{E}}{2sin\theta} \rightarrow R = \frac{0.61hc}{E.sin\theta} \tag{18}$$

Iremos adotar a constante $hc = 1240eV.nm = 1240MeV.fm$ e os valores de $sin\theta$ obtidos pela posição dos mínimos na distribuição angular.

Para o ^{16}O com energia $E = 360MeV$, a posição do mínimo foi de aproximadamente 52°. Então, o raio nuclear será de:

$$R = \frac{0.61(1240MeV.fm)}{360MeV.sin(52)} \rightarrow R = 2.66fm \tag{19}$$

Para o ^{16}O com energia $E = 420MeV$, a posição do mínimo foi de aproximadamente 44°. Então, o raio nuclear será de:

$$R = \frac{0.61(1240MeV.fm)}{420MeV.sin(44)} \rightarrow R = 2.59fm \tag{20}$$

Para o ^{12}C com energia $E = 420MeV$, a posição do mínimo foi de aproximadamente 51°. Então, o raio nuclear será de:

$$R = \frac{0.61(1240MeV.fm)}{420MeV.sin(51)} \rightarrow R = 2.31fm \tag{21}$$

Para os próximos **exercícios 3, 4, 5, 6 e 7** considere a seguinte formula da energia de massa *M(A,Z)*:

$$M(A,Z) = Zm_p + (A-Z)m_n - BE(A,Z)/c^2$$

Em que BE corresponde a energia de ligação, descrito por:

$$BE\,(Z,A) = B_v + B_s + B_e + B_a + B_p = a_vA - a_sA^{\frac{2}{3}} - a_eZ^2A^{-\frac{1}{3}} - a_a\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 A^{-1} + a_p\delta A^{-\frac{1}{2}}$$

$$= a_vA - a_sA^{\frac{2}{3}} - a_eZ^2A^{-\frac{1}{3}} - a_a\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 A^{-1} + a_p\delta A^{-\frac{1}{2}}$$

Em que:

$$a_v = 15.835 \text{ MeV},\ a_s = 18.33 \text{ MeV},\ a_e = 0.714 \text{ MeV},\ a_a = 92.80 \text{ MeV},\ a_p = 11.20 \text{ MeV}$$

$$\delta = \begin{cases} 1 \text{ para núcleos par-par} \\ 0 \text{ para núcleos par-ímpar ou ímpar-par} \\ -1 \text{ para núcleos ímpar-ímpar} \end{cases}$$

- **Exercício 3:** Mostre que a equação da energia de ligação é uma parábola para uma dada massa A (cadeia isobárica) e determine o valor de Z_{min}. Essa equação fornecerá três parábolas devido ao termo de emparelhamento.

  Nessa questão devemos expandir o termo da energia de ligação e agrupar os termos do numéro atômico Z. Partindo da expressão:

$$BE = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_e Z^2 A^{-\frac{1}{3}} - a_a \left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 A^{-1} + a_p \delta A^{-\frac{1}{2}} \tag{22}$$

  O termo $\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2$ pode ser expandido para $\frac{A^2}{4} - AZ + Z^2$, implicando em:

$$BE = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_e Z^2 A^{-\frac{1}{3}} - a_a \left(A^2 4 - AZ + Z^2\right) A^{-1} + a_p \delta A^{-\frac{1}{2}}$$

$$BE = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_e Z^2 A^{-\frac{1}{3}} - a_a \frac{A}{4} + a_a Z - a_a \frac{Z^2}{A} + a_p \delta A^{-\frac{1}{2}}$$

Agrupando os termos em função de Z:

$$BE_A(Z) = -Z^2 \left(a_c A^{-\frac{1}{3}} + a_a A^{-1}\right) + Z a_a + a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} + a_p \delta A^{-\frac{1}{2}} - a_a \frac{A}{4} \tag{25}$$

Essa expressão pode ser identificada como uma parábola na forma: $M = -\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma$, como :

$$\begin{aligned} \alpha = a_c A^{-\frac{1}{3}} + a_a A^{-1} \\ \beta = a_a \\ \gamma = a_v A + \frac{a_a}{4} A + a_s A^{\frac{2}{3}} - a_p \delta A^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{26}$$

Na prática essa expressão gera três possíveis parábolas dependendo do valor assumindo para o δ.

- **Exercício 4:** Obtenha o valor de Z_A que fornece a maior energia de ligação para A= 157, 156 e 75. Indique quais os núcleos eles poderiam se referir.

O valor do máximo global que correponde a maior energia de ligação Z_A pe obtido pela derivada da função BE_A. Considerando a forma simplificada, isso deve resultar em:

$$\frac{d\left(BE_A(Z)\right)}{dZ} = \frac{d\left(-\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma\right)}{dZ} = 0 \tag{27}$$

Então:

$$-2\alpha Z + \beta = 0 \rightarrow Z_A = \frac{\beta}{2\alpha} \tag{28}$$

Que resulta em:

$$Z_A = \frac{a_a}{2\left(a_c A^{-\frac{1}{3}} + a_a A^{-1}\right)} \tag{29}$$

Essa expressão pode ser empregada para calcular Z_A para os núcleos de A= 157, 156 e 75. Considerando $a_a = 92.80$ MeV e $a_c = 0.714$ MeV .

- **Exercício 5:** Calcule a energia de ligação por nucleon para o ^{15}N e ^{148}Gd.

  Resolução: A energia de ligação por nucleon é obtido pela razão do valor calculado para a energia de ligação, pela quantidade nucleons (i.e. número de prótons + número de nêutrons = A) que implica em:

$$\frac{BE}{A} = \frac{a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_e Z^2 A^{-\frac{1}{3}} - a_a \left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 A^{-1} + a_p \delta A^{-\frac{1}{2}}}{A} \tag{30}$$

  Isso resulta em:

$$\frac{BE}{A} = a_v - a_s A^{\frac{-1}{3}} - a_e Z^2 A^{-\frac{4}{3}} - a_a \left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 A^{-2} + a_p \delta A^{-\frac{-3}{2}} \tag{31}$$

  Para o 15N, têm-se A = 15 , Z = 7 e N = 8. Assim $\delta = 0$. Substituindo os valores numéricos:

$$\frac{BE}{A} = 15.835 - 18.33(15)^{\frac{-1}{3}} - 0.714(7)^2(15)^{-\frac{4}{3}} - 92.8\left(\frac{15}{2} - 8\right)^2 (15)^{-2} \tag{32}$$

  Com as devidas operações:

$$\frac{BE}{A} = 7.35 \text{ MeV/A} \tag{33}$$

  Esse mesmo procedimento pode ser adotado para o ^{148}Gd, agora A = 148 , Z= 64 e N =84. Assim, $\delta = 1$.

  Solução: 8.8 MeV/A

- **Exercício 6:** Determine uma expressão para a energia necessária para arrancar um nêutron de um núcleo em função das energias de ligação *(Parte I)*. Qual energia para remover um nêutron do ^{40}Ca *(Parte II)*?

  RESOLUÇÃO: A remoção de um nêutron de núcleo corresponde a reação nuclear:

$${}^A_Z X \rightarrow^{A-1}_Z Y + n$$

  Pela expressão do Q de reação, podemos escrever:

$$Q = \left(\sum M_{inicial} - \sum M_{final}\right) c^2$$

  Seguindo a reação, temos que:

$$Q = \left(M_{{}^A_Z X} - M_{{}^{A-1}_Z Y} - M_n\right) c^2 \tag{34}$$

  No caso dos núcleos, a expressão da massa corresponde a equação semi-empírica da massa *M(A,Z)*:

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - BE(A, Z)/c^2$$

  Em que m_p e m_n são as massas de reposuso do proton e nêutron e *BE(A,Z)* é a energia de ligação. Seguindo a descrição da expressão , temos:

$$Q = \left(Zm_p + (A - Z)m_n - BE(A, Z)/c^2 - \left[Zm_p + (A - 1 - Z)m_n - BE(A - 1, Z)/c^2\right] - M_n\right) c^2$$

Observando os temos que depende da massa m_p e m_n vemos que eles se anulam, de forma que o Q-reação é a diferença entre energia de ligação do núcleo-pai com o a energia de ligação do núcleo-filho:

$$Q = BE(A-1, Z) - BE(A, Z) \ \textit{(Resposta parte I)}$$

A expressão de energia de ligação é escrita como:

$$BE(Z, A) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_e Z^2 A^{-\frac{1}{3}} - a_a \left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 A^{-1} + a_p \delta A^{-\frac{1}{2}} \tag{35}$$

O decaimento do ^{40}Ca (*Z=20, A = 40, N = 20*) com um nêutron deve resultar em ^{39}Ca (*Z=20, A = 39, N = 19*). Assim, a diferença da energia de ligação deve resultar em:

$$\begin{aligned} Q = {} & a_v(39) - a_s(39)^{\frac{2}{3}} - a_e(20)^2(39)^{-\frac{1}{3}} - a_a\left(\tfrac{39}{2} - 20\right)^2(39)^{-1} + a_p(0)(39)^{-\frac{1}{2}} \\ & - \left[a_v(40) - a_s(40)^{\frac{2}{3}} - a_e(20)^2(40)^{-\frac{1}{3}} - a_a\left(\tfrac{40}{2} - 20\right)^2(40)^{-1} + a_p(1)(40)^{-\frac{1}{2}}\right] \end{aligned}$$

Observe que δ é **nulo** para ^{39}Ca (Z par e N ímpar) e **1** para ^{40}Ca (Z par e N par). Seguindo as operações matemáticas:

$$Q = -a_v + 0.1957 a_s - 0.9912 a_e - 0.0006410 a_a - 0.1581 a_p$$

Substituindo os valores numéricos dos termos ajustados encontramos:

$$Q{=}-(15.835 \text{ MeV}){+}0.1957(18.33 \text{ MeV}){-}0.9912(0.714 \text{ MeV}){-}0.0006410(92.80 \text{ MeV}){-}0.1581(11.20 \text{ MeV })$$

$$Q{=}-15.835{+}3.5882{-}0.7007{-}0.59{-}0.158 Q{=} \ \textit{(Resposta parte II)}$$

- **Exercício 7:** O ^{11}C decai por emissão de pósitron para o ^{11}B. Descreva a equação para esse decaimento *(Parte I)*. Por que precisamos ter um neutrino nesse decaimento *(Parte II)*? A partir das informações que podem ser obtidas da Figura 2, determine o valor do termo coulombiano (a_c) da equação empírica de massa *(Parte III)*. (despreze a massa do neutrino e considere massa do eletron como 0.511 MeV).

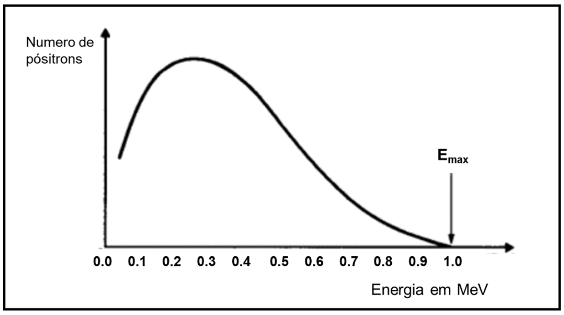

Figura 2: Para o **Exercício 7**.

RESOLUÇÃO: O decaimento por emisão de pósitron ou ainda decaimento β^+ é caracterizado pela conversão de um próton em um nêutron, com a emissão de um pósitron(e^+) e de um neutrino de elétron(ν_e):

$$\text{energia} + p \to n + e^+ + \nu_e$$

O núcleo-filho será caracterizado por apresentar a mesma massa que núcleo-pai porém com uma unidade a menos de numéro atômico:

$$ {}^A_Z X \rightarrow^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e $$

Então, a reação de decaimento β^+ do ^{11}C será:

$$ {}^{11}_6 C \rightarrow^{11}_5 B + e^+ + \nu_e \text{ ou } {}^{11}\mathrm{C}(\beta^+\nu_e)^{11}\mathrm{B} \quad \textit{(Resposta parte I)} \tag{36} $$

A emissão do neutrino é nescessária para que a conservação da energia e da quantiade de movimento seja respeitada. *(Resposta parte II)*
A informação obtida pela Figura 2 corresponde a energia máxima emitida pelo pósitron nesse decaimento. Esse valor de aproximadamente 1 MeV é igual ao Q de reação, em que são comparadas a quantidade de massa final e inicial da reação incluindo termo da energia de ligação pela equação:

$$ Q = \left(\sum M_{inicial} - \sum M_{final} \right) c^2 $$

De forma que as masa podem ser expressão em MeV/c^2. A **Equação Semi-empírica de massa**(*M(A,Z)*), nos permite relacionar essas massa pela forma:

$$ M(A,Z) = Zm_p + (A-Z)m_n - BE(A,Z)/c^2 $$

Em que m_p e m_n são as massas de reposuso do proton e nêutron e *BE(A,Z)* é a energia de ligação. Considerando reação encontrada na resposta parte I 36, teremos:

$$ Q = (M_{^{11}C} - M_{^{11}B} - M_{e^+} - M_{\nu_e})\, c^2 \tag{37} $$

A massa do pósitron é a mesma massa elétron (0.511 MeV/c^2), pois uma é a antipartícula da outra. Já a massa do neutrino é nula, como indicada no enunciado. Assim, a expressão 37 deve-se resumir a diferença:

$$ \begin{gathered} 1 \text{ MeV} = \left(M_{^{11}C} - M_{^{11}B} - 0.511 \tfrac{MeV}{c^2} + 0 \text{ MeV} \right) c^2 \\ 1.511 \text{ MeV} = (M_{^{11}C} - M_{^{11}B})\, c^2 \end{gathered} \tag{38} $$

Antes de substituir a equação semi-empírica, podemos simplificar as operações adotando uma notação que relaciona os numéros atômicos e de massa do ^{11}C e ^{11}B pela forma:

$$ \begin{gathered} Z_{^{11}C} = Z \text{ logo } Z_{^{11}B} = Z - 1 \\ A_{^{11}C} = A_{^{11}B} = A \end{gathered} \tag{39} $$

Então, a equação 38 deve resultar em:

$$ \begin{gathered} 1.511 \text{ MeV} = \left[Z_{11_C} m_p + (A-Z)_{11_C} m_n - BE(A,Z)_{11_{C/c^2}} - \left(Z_{11_B} m_p + (A-Z)_{11_B} m_n - BE(A,Z)_{11_B}/c^2 \right) \right] c^2 \\ 1.511 \text{ MeV} = \left[Zm_p + (A-Z)m_n - BE(A,Z)/c^2 - \left((Z-1)m_p + (A-(Z-1))m_n - BE(A,Z-1)/c^2 \right) \right] c^2 \\ 1.511 \text{ MeV} = \left[Zm_p + (A-Z)m_n - BE(A,Z)/c^2 - Zm_p - m_p - (A-Z)m_n - m_n + BE(A,Z-1)/c^2 \right] c^2 \\ 1.511 \text{ MeV} - m_p c^2 + m_n c^2 = BE(A, Z-1) - BE(A,Z) \end{gathered} \tag{40} $$

A expressão de energia de ligação é escrita como:

$$ BE(Z,A) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_e Z^2 A^{-\frac{1}{3}} - a_a \left(\frac{A}{2} - Z \right)^2 A^{-1} + a_p \delta A^{-\frac{1}{2}} \tag{41} $$

Então, a diferença *BE(A,Z-1) - BE(A,Z)* será:

$$\begin{aligned}BE(A,Z-1)-BE(A,Z) &= a_vA-a_sA^{\frac{2}{3}}-a_e(Z-1)^2A^{-\frac{1}{3}}-a_a\left(\tfrac{A}{2}-(Z-1)\right)^2A^{-1}+a_p\delta A^{-\frac{1}{2}}\\ &-\left(a_vA-a_sA^{\frac{2}{3}}-a_eZ^2A^{-\frac{1}{3}}-a_a\left(\tfrac{A}{2}-Z\right)^2A^{-1}+a_p\delta A^{-\frac{1}{2}}\right)\\ BE(A,Z-1)-BE(A,Z) &= -a_e(Z-1)^2A^{-\frac{1}{3}}-a_a\left(\tfrac{A}{2}-(Z-1)\right)^2A^{-1}\\ &+a_eZ^2A^{-\frac{1}{3}}+a_a\left(\tfrac{A}{2}-Z\right)^2A^{-1}\end{aligned}$$

Lembrando que o termo a_e e a_a corresponde ao termo coulombiano e o termo assimétrico. Substituindo *Z=6* e *A=11* temos:

$$\begin{aligned}BE(A,Z-1)-BE(A,Z) &= -a_e(Z-1)^2A^{-\frac{1}{3}}-a_a\left(\tfrac{A}{2}-(Z-1)\right)^2A^{-1}\\ &+a_eZ^2A^{-\frac{1}{3}}+a_a\left(\tfrac{A}{2}-Z\right)^2A^{-1}\\ BE(A,Z-1)-BE(A,Z) &= -a_e(6-1)^2 11^{-\frac{1}{3}}-a_a\left(\tfrac{11}{2}-(6-1)\right)^2 11^{-1}\\ &+a_e(6)^2 11^{-\frac{1}{3}}+a_a\left(\tfrac{11}{2}-6\right)^2 11^{-1}\\ BE(A,Z-1)-BE(A,Z) &= -a_e(6-1)^2 11^{-\frac{1}{3}}-a_a\left(\tfrac{11}{2}-(6-1)\right)^2 11^{-1}\\ &+a_e(6)^2 11^{-\frac{1}{3}}+a_a\left(\tfrac{11}{2}-6\right)^2 11^{-1}\\ BE(A,Z-1)-BE(A,Z) &= \frac{9}{11^{\frac{1}{3}}}a_e\end{aligned}$$

Logo, a expressão 40 resulta em:

$$\begin{aligned}1.511\text{ MeV}+m_nc^2 &= BE(A,Z-1)-BE(A,Z)\\ 1.511-m_pc^2+m_nc^2 &= \frac{9}{11^{\frac{1}{3}}}a_e\\ a_e &= \frac{1.511+m_nc^2-m_pc^2}{9}\sqrt[3]{11}\end{aligned}$$

Adotando a massa do nêutron como 939.550 MeV/c^2 e massa do próton como 938.256 MeV/c^2, o termo coulombiano resulta em:

$$\begin{aligned}a_e &= \frac{1.511+939.550\frac{MeV}{c^2}c^2-938.256\frac{MeV}{c^2}c^2}{9}\sqrt[3]{11}\\ a_e &= 0.6931\text{ MeV (Resposta parte III)}\end{aligned}$$

- **Exercício 8:** Cite (3) das principais características de cada um dos seguintes modelos nucleares:
  - (a) Gota-líquida;
  - (b) Camadas;
  - (c) Modelo coletivo.
- **Exercício 9:** Considerando o termo de spin-orbita, caracterize as duas primeiras camadas de acordo com o números quânticos n,l e j. Considere o nível correspondente a uma camada fechada mais um próton com momento angular l e j com $j=l\pm\frac{1}{2}$. Seja g$_p$ o valor do fator giromagnético de um próton livre. Determine o fator giromagnético do nível em questão para os dois casos, $j=l-\frac{1}{2}$ e$j=l+\frac{1}{2}$ com $l=1$.

  Resolução: Adotando o termo de spin-orbita, as camdas com n=0, 1, e 2 tem seus subníveis apresentados na Figura 3.

  O momento magnético de um dipolo devido ao movimento orbital é calculado pela expressão:

$$\vec{\mu_l}=g_l\vec{l}\mu_N \tag{42}$$

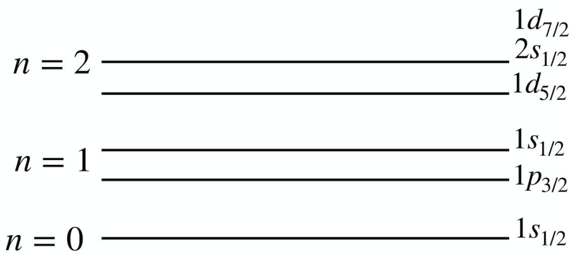

Figura 3: **Níveis de energia pelo modelo de camadas**.

Em que μ_N é o magneton nuclear de valor $3.1525.10^-8ev/T$. O termo g_l é fator giromagnético de valor 1 para prótons e 0 para nêutrons. Para obter o fator giromagnético de um nível j deve-se acoplar o momento magnético do spin como orbital, pela expressão:

$$\vec{\mu_j} = \vec{\mu_l} + \vec{\mu_s} \tag{43}$$

Considerando a soma:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \tag{44}$$

Então:

$$g_j \vec{j} \mu_N = g_l \vec{l} \mu_N + g_s \vec{s} \mu_N \tag{45}$$

Multiplicando os dois lados pelo $\vec{j}$, essa expressão resulta em:

$$g_j (\vec{j}.\vec{j}) = g_l (\vec{l}.\vec{j}) + g_s (\vec{s}.\vec{j}) \tag{46}$$

Pela soma de momento angular, pode-se encontrar:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \rightarrow \vec{l} = \vec{j} - \vec{s} \rightarrow l^2 = j^2 + s^2 - 2\vec{s}.\vec{j} \tag{47}$$

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \rightarrow \vec{s} = \vec{j} - \vec{l} \rightarrow s^2 = j^2 + l^2 - 2\vec{l}.\vec{j} \tag{48}$$

Além disso, da mecânica quântica têm-se as seguintes relações com os numéros quânticos:

$$l^2 = l(l+1) \quad j^2 = j(j+1) \quad s^2 = s(s+1) \tag{49}$$

De forma que:

$$g_j j(j+1) = g_l \left[\frac{1}{2} j(j+1) + \frac{1}{2} l(l+1) - \frac{1}{2} s(s+1) \right] + g_s \left[\frac{1}{2} j(j+1) + \frac{1}{2} s(s+1) - \frac{1}{2} l(l+1) \right] \tag{50}$$

Para o próton $g_l = 1$ e $g_s = g_p$. Com essa expressão, pode-se avaliar os dois casos solicitados no enunciado:

$$j = l - \frac{1}{2} \rightarrow g_j = \frac{1}{j+1} \left(j + \frac{3}{2} - \frac{g_p}{2} \right) \tag{51}$$

e

$$j = l + \frac{1}{2} \rightarrow g_j = \frac{2j-1}{2j} + \frac{g_p}{2j} \tag{52}$$

- **Exercício 10:** Mostre que para uma dada órbita nuclear caracterizada por um dado valor de j, existem no máximo $2j+1$ núcleons. Este resultado é consistente com o Princípio de Pauli?

- **Exercício 11:** O nível de energia em 3 dimensões para um oscilador harmônico isotrópico é dado por:

$$E = \left(2n + l + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega = \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$

No modelo de partícula única o termo pode ser ajustado por $44\mathrm{A}^{-\frac{1}{3}}$.

  (a) Desenhe o esquema de níveis sem a perturbação e com a perturbação do termo spin-orbita (apenas considere que os estados se desdobram devido ao termo spin-orbita, não precisa calcular a energia de desdobramento);

  (b) Com base no modelo de camadas determine o spin e paridade do estado fundamental para os seguintes núcleos ^{3}He, ^{17}O, ^{34}K e ^{41}Ca;

  (c) Qual a diferença de energia entre as camadas $N = 1$ e $N = 2$ para o ^{3}He e para o ^{41}Ca.

- **Exercício 12:** De acordo com o modelo de camadas com termo de spin-orbita:

  (a) Qual seria o spin-paridade e isospin dos estados fundamentais dos núcleos ^{13}B, ^{13}C e ^{13}N?;

  (b) Qual a ordem desses núcleos da cadeia isobárica $A = 13$ de acordo com suas massas, justifique;

  (c) Considerando que a energia de uma esfera uniformemente carregada é dada pela energia eletrostática $W = \frac{3Q^2}{5R}$, estime a diferença de energia entre os membros da cadeia isobárica $A = 13$.

Resolução: a) Os núcleos para análise são:

- ^{13}B => Z = 5 , A = 13 e N = 8 ;
- ^{13}C => Z = 6 , A = 13 e N = 7 ;
- ^{13}N => Z = 7 , A = 13 e N = 6 ;

Então, a distribuição de núcleons pelo modelo de camada é apresentado na Figura 4.

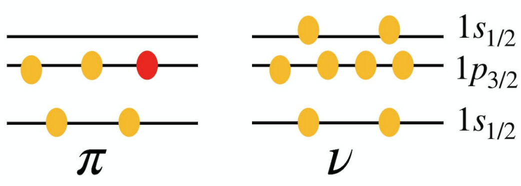

Figura 4: **Determinação do Spin e Paridade para ^{13}B.**

Os valores de spin e parridade serão:

- ^{13}B => $J^\pi = \left(\frac{3}{2}\right)^-$;
- ^{13}C => $J^\pi = \left(\frac{1}{2}\right)^-$;
- ^{13}N => $J^\pi = \left(\frac{1}{2}\right)^-$;

b) A diferença de massa é calculada por:

$$\Delta = (m - A) * 931.49\text{MeV/c}^2 \tag{53}$$

Considerando as massa de cada núcleo:

- ^{13}B => m = 13.017780 u;
- ^{13}C => m = 13.003354 u;
- ^{13}N => m = 13 042815 u ;

Assim, a sequência de massas deve ser ^{13}C < ^{13}N < ^{13}B. O ^{13}N tem um próton a mais que o ^{13}C e portanto uma energia colombiana maior, logo mais instável. Já o ^{13}B tem mais nêutron, e massa do nêutron e maior que a do próton.

c) A energia da esfera foi definida como $W = \frac{3Q^2}{5R}$ e a diferença da cadeia isobárica será calculada entre ^{13}N e ^{13}C. Assim, a diferença de energia será obtida por:

$$m(^{13}N) - m(^{13}C) = \frac{3}{5R}\left(Q_N^2 - Q_N^2\right) - (m_n - m_p)\,c^2 \tag{54}$$

Essa expressão ainda por ser rescrita como:

$$m(^{13}N) - m(^{13}C) = \frac{3}{5}\frac{1}{1.3A^{1/3}}\hbar c\left(\frac{l^2}{\hbar c}\right)\left(Q_N^2 - Q_N^2\right) - (m_n - m_p)\,c^2 \tag{55}$$

Adotando a massa do próton e do nêutron e demais constantes:

$$m(^{13}N) - m(^{13}C) = 3,64 - 0,78\text{ MeV} \therefore m(^{13}N) - m(^{13}C) = 2.22\text{ MeV} \tag{56}$$

- **Exercício 13:** Discuta a estabilidade dos núcleos ^{30}P, ^{98}Tc, ^{118}Sn e ^{239}Pu.

- **Exercício 14:** Utilizando o modelo de camadas qual seria a ordem dos orbitais para ^{9}Be, ^{31}P, ^{59}Co.

- **Exercício 15:** A figura abaixo fornece os valores de energia, spin e paridade para os primeiros estados excitados do ^{18}O.

    (a) Os spin e paridade informados correspondem ao que se esperaria do modelo de camadas?;

    (b) Quais spin e paridade você esperaria para os primeiros estados do ^{19}O?;

    (c) Considere um núcleo ^{18}O fictício com os estados J^P=0^+, 2^+ e 4^+. Se esses estados correspondem a estados rotacionais, sendo que o primeiro estado excitado com energia 2.0 MeV, qual seria a energia do segundo estado excitado e qual o momento de inércia desse núcleo;

(d) Considere agora um núcleo fictício ^{19}O, com uma deformação e com o mesmo momento de inércia do ^{18}O, qual seria a energia dos 3 primeiros estados, considerando que sejam estados rotacionais.

- **Exercício 16:** Derive a Lei de decaimento radioativo. Determine a atividade de uma grama de ^{226}Ra, sabendo que sua meia vida é 1622 anos.

- **Exercício 17:** O ^{22}Na é um importante elemento radioativo produzido numa explosão de nova. Esse elemento possui uma meia vida de 2.6 anos. Quanto tempo é necessário para que 5 mg de ^{22}Na se reduza a 1 mg?

- **Exercício 18:** Considere um decaimento sequencial onde um núcleo 1 decai para um núcleo 2 que por sua vez decai para um núcleo 3. Cada decaimento possui uma constante de decaimento diferente. Considerando que a quantidade de núcleo 2 no tempo $t = 0$ é nula qual é o tempo para que possamos ter o máximo de núcleos 2?

- **Exercício 19:** O núcleo ^{38}Cl decai por beta. Os elétrons são emitidos com energias 1.11, 2.77 e 4.81 MeV. Além disso dois raios-gama são observados no decaimento com energias 2.16 e 1.59 MeV. Monte o esquema de desintegração.