TRANSFORMAÇÕES LINEARES

DEFINIÇÃO: Sejam V e W espaços vetoriais. Uma função $T: V \longrightarrow W$ é uma **transformação linear** se

$$(1)\quad T(\underbrace{u+v}_{\text{soma em } V}) = T(u) \underbrace{+}_{\text{soma em } W} T(v) \quad \text{para todos } u, v \in V;$$

$$(2)\quad T(\underbrace{av}_{\text{mult por escalar em } V}) = \underbrace{aT(v)}_{\text{mult por escalar em } W} \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R} \text{ e } v \in V$$

Exemplos:

(1) $T: V \longrightarrow W$

$T(v) = 0$ para todo $v \in V$.

(FUNÇÃO CONSTANTE igual a 0)

(2) $I: V \longrightarrow V$ tal que $I(v) = v$ para todo $v \in V$

↳ identidade de V em V.

(3) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$T(x, y) = (x, x+y, x+2y)$.

(4) $T: M_{2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ (NÃO É LINEAR)

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

Não é linear (veja que não vale (2))

$$\left\{\begin{array}{l} T\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = 4 \\ T\left(2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4 \neq 2T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \end{array}\right.$$

(5) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(x, y) = (x^2 + y^2, x + y)$

(NÃO é linear)

(6) $T: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$T\left((a_{ij})\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(7) $T: P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow P_n(\mathbb{R})$

$$T(p(t)) = p'(t).$$

(8) $T: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1+x_2+x_3,\ x_1+x_4,\ x_1+x_5)$$

PRIMEIRAS PROPRIEDADES DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

(1) $T(0_V) = 0_W \qquad T: V \longrightarrow W$

Dem: $T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V)$

$$\Rightarrow 0_W + \cancel{T(0_V)} = T(0_V) + \cancel{T(0_V)}$$

$$\Rightarrow T(0_V) = 0_W.$$

(2) $T(-v) = -T(v)$ para todo $v \in V$

Dem: $T(-v) = T((-1)v) = (-1)T(v) = -T(v)$

TEOREMA: Seja $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V e seja $C = \{w_1, \dots, w_n\} \subset W$. Então existe uma única transformação linear $T: V \longrightarrow W$ tal que

$$T(v_i) = w_i \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Demonstração: Temos que definir $T(v)$ para todo $v \in V$.

Como B é uma base de V, existem (únicos) $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$$

Definimos: $T(v) = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n$

Como v se escreve de MODO ÚNICO como combinação linear da base, T está bem definida.

Provar que T é linear.

(1) Sejam $u = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$,
$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

Então $u + v = (y_1 + x_1) v_1 + \dots + (y_n + x_n) v_n$

e $T(u+v) = (y_1 + x_1) w_1 + \dots + (y_n + x_n) w_n$

$= (y_1 w_1 + \dots + y_n w_n) + (x_1 w_1 + \dots + x_n w_n)$

$= T(u) + T(v)$

(2) $T(av) = T(a(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n)) =$

$T((ax_1) v_1 + \dots + (ax_n) v_n)$

$= (ax_1) w_1 + \dots + (ax_n) w_n$

$= a(x_1 w_1 + \dots + x_n w_n)$

$= a T(v)$.

É claro que $T(v_i) = w_i$

$v_i = 0 v_1 + \dots + 0 v_{i-1} + 1 v_i + 0 v_{i+1} + \dots + 0 v_n$

$T(v_i)$ $0 w_1 + \dots + 0 w_{i-1} + 1 w_i + 0 w_{i+1} + \dots + 0 v_n$

T é única

Suponha que $S: V \to W$ é linear tal que $S(v_i) = w_i \quad \forall\, i = 1, \dots, n$.

Então, escrevendo $v \in V$ como

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n,$$ temos que

$$S(v) = x_1 S(v_1) + \dots + x_n S(v_n)$$
S linear
$$= x_1 w_1 + \dots + x_n w_n = T(v).$$

Exemplo: Defina $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(e_1) = (1,1)$, $T(e_2) = (-1,2)$ e $T(e_3) = (2,0)$.

$$T(x,y,z) = T(xe_1 + ye_2 + ze_3) =$$
$$x\,T(e_1) + y\,T(e_2) + z\,T(e_3)$$
$$= x(1,1) + y(-1,2) + z(2,0)$$
$$= (x - y + 2z,\ x + 2y)$$

Exemplo: Defina $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$T(\underbrace{1,1,1}_{v_1}) = (0,1,2,3)$$
$$T(\underbrace{2,1,2}_{v_2}) = (4,3,2,1)$$

Existem infinitas maneiras de estender $\{v_1, v_2\}$ a uma base de $\mathbb{R}^3$

Os vetores v_1 e v_2 são LI. Completamos $\{v_1, v_2\}$ a uma base de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\{v_1, v_2, e_1\}$ é LI

Escreva $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ como $(x,y,z) = a v_1 + b v_2 + c e_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 2 & 0 & z \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & -1 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & -1 & z-x \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & x-z \end{array}\right]$$

Então: $\boxed{c = x - z}$

$b + c = x - y$

$\boxed{b = x - y - x + z = z - y}$

$a + 2b + c = x$

$a + 2z - 2y + \cancel{x} - z = \cancel{x}$

Logo $\boxed{a = 2y - z}$

$$T(x,y,z) = T(a v_1 + b v_2 + c v_3) =$$

$$a\,T(v_1) + b\,T(v_2) + c\,T(v_3)$$

$$= (2y - z)(0,1,2,3) + (z-y)(4,3,2,1)$$

$$+ (x - z)\underbrace{T(e_1)}_{\text{pode ser qualquer vetor do } \mathbb{R}^4} \longrightarrow$$ Existem infinitos modos de definir $T(e_1)$

O importante é $\begin{cases} T(v_1) \\ T(v_2) \end{cases}$

Se colocarmos, por exemplo, $T(e_1) = 0$,

temos $T(x,y,z) = (0,\ 2y - z,\ 4y - 2z,\ 6y - 3z)$

$+ 4(z - y,\ 3z - 3y,\ 2z - 2y,\ z - y)$

$= (4z - 4y,\ 2z - y,\ 2y,\ 5y - 2z)$

Essa é uma satisfazendo as condições. Existem INFINITAS.

NÚCLEO E IMAGEM

$T: V \longrightarrow W$ transformação linear

$$\operatorname{Ker} T = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$$

núcleo de T

$$\operatorname{Im} T = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ com } w = T(v)\}$$

imagem de T como função

$$= \{T(v) \mid v \in V\}$$

Ker T é um subespaço de V

(1) $0 \in \operatorname{Ker} T$, já que $T(0) = 0$

(2) Se $v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} T$ então $v_1 + v_2 \in \operatorname{Ker} T$

Dem: $v_1 \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow T(v_1) = 0$

$v_2 \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow T(v_2) = 0$

$$T(v_1 + v_2) \underset{T \text{ é linear}}{=} T(v_1) + T(v_2) \underset{v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} T}{=} 0 + 0 = 0$$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in \operatorname{Ker} T$.

(3) Se $v \in \operatorname{Ker} T$ e $a \in \mathbb{R}$, $av \in \operatorname{Ker} T$.

$v \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow T(v) = 0$.

$$T(av) \overset{T \text{ é linear}}{=} a\,T(v) \underset{v \in \operatorname{Ker} T}{=} a \cdot 0 = 0$$

Logo $av \in \operatorname{Ker} T$.

Im T é um subespaço de V

(1) $0 \in \text{Im}\,T$, já que $T(0) = 0$.

(2) Se $w_1, w_2 \in \text{Im}\,T$, então $w_1 + w_2 \in \text{Im}\,T$

$w_1 \in \text{Im}\,T \Rightarrow \exists\, v_1 \in V$ tal que $T(v_1) = w_1$

$w_2 \in \text{Im}\,T \Rightarrow \exists\, v_2 \in V$ tal que $T(v_2) = w_2$.

Temos então:

$$w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) \underset{T \text{ é linear}}{=} T(v_1 + v_2).$$

Logo $w_1 + w_2 \in \text{Im}\,T$.

(3) Se $w \in \text{Im}\,T$ e $a \in \mathbb{R}$, então $aw \in \text{Im}\,T$.

$w \in \text{Im}\,T \Rightarrow \exists\, v \in V$ tal que $w = T(v)$.

$aw = aT(v) \underset{T \text{ é linear}}{=} T(av)$. Logo $aw \in \text{Im}\,T$.

Exemplo:

Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + y - z,\ 2x - y - z)$.

Determine Ker T.

$$\text{Ker}\,T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \text{ e } 2x - y - z = 0\}$$

Temos o sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistema equivalente

$$x + y - z = 0$$
$$-3y + z = 0$$

$$z = 3y \qquad x = -y + z = -y + 3y$$

$$z = 2y$$

Logo $(x, y, z) = (2y, y, 3y) = y(2,1,3)$
$= [(2,1,3)]$.

PROPOSIÇÃO: Seja $T: V \longrightarrow W$ uma transformação linear e seja $B = \{v_1, ---, v_n\}$ uma base de V. Então $\operatorname{Im} T = [T(v_1), T(v_2), ---, T(v_n)]$.

Demonstração:

Seja $w \in \operatorname{Im} T$. Queremos mostrar que w se escreve como combinação linear de $\{T(v_1), ---, T(v_n)\}$

$$w \in \operatorname{Im} T \implies \exists\, v \in V \text{ tq } w = T(v).$$

Como $\mathcal{B}$ é base de V, podemos escrever
$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$
Logo, como T é linear,
$$T(v) = a_1 T(v_1) + \cdots + a_n T(v_n).$$

$T: V \to W$ é injetora se T é injetora como função, isto é, se para $v_1, v_2 \in V$, $T(v_1) = T(v_2)$
$$\Longrightarrow v_1 = v_2.$$
(ou equivalentemente, se $v_1 \neq v_2 \Longrightarrow$
$$T(v_1) \neq T(v_2).)$$

$T: V \to W$ é sobrejetora se for sobrejetora como função, isto é, se $\operatorname{Im} T = W$.

TEOREMA: $T: V \to W$ é injetora $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} T = \{0\}$.

Dem: $(\Longrightarrow)$ Suponha T injetora e seja $v \in \operatorname{Ker} T$. Então
$$T(v) = 0 = T(0) \underset{T \text{ é injetora}}{\Longrightarrow} v = 0$$

$(\Longleftarrow)$ Suponha que $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.

Sejam $u, v \in V$ tais que $T(u) = T(v)$. Queremos provar que $u = v$.

$$T(u) = T(v) \Rightarrow T(u) - T(v) = 0$$

$$\Rightarrow T(u) + (-1)T(v) = 0 \underset{T\ \text{linear}}{\Rightarrow}$$

$$T(u + (-1)v) = 0 \Rightarrow T(u - v) = 0,$$

$$\Rightarrow u - v \in \operatorname{Ker} T$$

Como $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, temos que $u - v = 0 \Rightarrow u = v$. ∎

Denotamos por $\boxed{L(V, W) = \{T: V \to W \mid T \text{ é linear}\}}$

Quando $T: V \longrightarrow V$ é uma transformação linear, chamamos T de OPERADOR LINEAR em V.

$$\boxed{L(V, V) = L(V) = \{T: V \to V \mid T \text{ é operador linear}\}}$$

TEOREMA DO NÚCLEO E DA IMAGEM.

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita n e W um espaço vetorial.
Seja $T \in L(V, W)$.
Então $\boxed{n = \dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T.}$

Demonstração:
Seja $B_K = \{v_1, \ldots, v_k\}$ uma base de $\operatorname{Ker} T$.
Estenda B_K a uma base de V
$B = \{\underbrace{v_1, \ldots, v_k}_{\text{base de } \operatorname{Ker} T}, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ base de V

AFIRMAÇÃO
$B_I = \{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\}$ é uma base de $\operatorname{Im} T$.

(1) $[B_I] = \operatorname{Im} T$ (É claro que $B_I \subset \operatorname{Im} T$)
Seja $w \in \operatorname{Im} T$. Então existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$.
Como B é base de V, existem $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$.

$w = T(v) = a_1 \underbrace{T(v_1)}_{=0} + \cdots + a_k \underbrace{T(v_k)}_{=0} + a_{k+1} T(v_{k+1}) + \cdots + a_n T(v_n)$ pois $B_K \subset \operatorname{Ker} T$

(2) B_I é LI.
Suponha que $b_{k+1}, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ são tais

que $b_{k+1}T(v_{k+1}) + \cdots + b_n T(v_n) = 0$

Logo $T(b_{k+1}v_{k+1} + \cdots + b_n v_n) = 0$ o que implica que

$$b_{k+1}v_{k+1} + \cdots + b_n v_n \in \operatorname{Ker} T.$$

Como $\{v_1, \ldots, v_k\} = B_K$ é um base de $\operatorname{Ker} T$, existem $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que $a_1v_1 + \cdots + a_k v_k = b_{k+1}v_{k+1} + \cdots + b_n v_n$.

Logo $a_1v_1 + \cdots + a_k v_k + (-b_{k+1})v_{k+1} + \cdots + (-b_n)v_n = 0$

Como $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é LI temos que

$$a_1 = \cdots = a_k = b_{k+1} = \cdots = b_n = 0.$$

Portanto, de (1) e (2) temos que B_I é uma base de $\operatorname{Im} T$, provando o resultado. ∎

CONSEQUÊNCIAS DO TEOREMA DO NÚCLEO e da IMAGEM.

Sejam V e W espaços vetoriais e

$T: V \to W$ transformação Linear.

Seja $n = \dim V$ e $m = \dim W$.

(1) Se $n > m$, então T não é injetora;

(2) Se $n < m$ então T não é sobrejetora;

(3) Se $n = m$ então T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.

Demonstração:

(1) Seja $m = \dim W$. Então $\dim \operatorname{Im} T \leq m$, já que $\operatorname{Im} T$ é um subespaço de W.

$n = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T \Rightarrow$

$\dim \operatorname{Ker} T = n - \dim \operatorname{Im} T \geq n - m > 0$.

(2) $\dim \operatorname{Im} T \leq n < m$. Logo $\operatorname{Im} T \neq W$.

(3) Suponha que $n = m$.

Se T é injetora, então $\dim V = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} T}_{=0} + \dim \operatorname{Im} T$

(pois T é injetora)

$\Rightarrow \dim V = \dim \operatorname{Im} T = \dim W$.

Logo $\operatorname{Im} T$ é um subespaço de W tal que $\dim \operatorname{Im} T = \dim W$. Logo $\operatorname{Im} T = W$.

Se T é sobrejetora, $\dim \operatorname{Im} T = \dim W = \dim V$.

Logo $\dim \operatorname{Ker} T = 0$ e T é injetora. ∎