O TEOREMA DE GREEN

1. Teorema de Green - caso particular

O Teorema de Green é um dos resultados centrais no Cálculo Integral e estabelece um relação entre integrais de linha de campos vetoriais e integrais duplas.

Vamos enunciá-lo, inicialmente, em um caso especial

Teorema 1.1. *(Teorema de Green - caso particular) Seja* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *uma curva fechada simples, lisa por partes, orientada no sentido antihorário e* R *seu interior. Se* $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ *é um campo de classe* $\mathcal{C}^1$ *em um aberto contendo* $R \cup tr(\gamma)$*, então*

$$\oint_\gamma P\,d\,x + Q\,d\,y = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\,x\,d\,y.$$

Observação 1.2. *A igualdade do teorema, escrita na forma vetorial fica:*

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} = \iint_R \, r\vec{o}t\vec{F} \cdot \vec{k}.$$

Exemplo 1.3. *Calcular a integral*

$$\oint (3x - y)\,d\,x + (x + 5y)\,d\,y$$

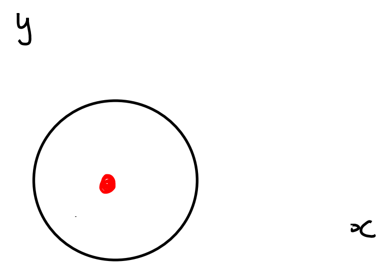
sobre a circunferência de raio 1*, percorrida uma única vez no sentido horário.*

Date: November 13, 2023.

2. Condição suficiente para independência de caminhos

Vimos que uma condição necessária para que um campo $\vec{F}(x,y)$ seja conservativo no domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ é que seu rotacional se anule em D. Porém, como também vimos, esta condição não é suficiente. O campo $\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$ é irrotacional em $D = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, mas sua integral sobre certas curvas fechadas (a circunferência de centro na origem, por exemplo) não é nula.

Observemos, entretanto que, nesse exemplo, o domínio D não contém a origem e, portanto, o interior R das circunferências com centro na origem não está contido em D.



Vamos então considerar uma classe especial de domínios nos quais este problema não ocorre.

Definição 2.1. *Dizemos que o domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ é* ***simplesmente conexo****, se toda curva fechada simples com traço contido em D tem seu interior contido em D*

Observação 2.2.

- *Uma definição alternativa (que vale também em $\mathbb{R}^3$) é que toda curva contínua γ pode ser contraída continuamente a um ponto em D.*
- *Intuitivamente um domínio é simplesmente conexo quando ele "não tem buracos").*

simpl. conexo   não simpl. conexo

Agora, se D é domínio simplesmente conexo e $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva lisa fechada simples contida em D, e $\vec{F}(x,y)$ é irrotacional, segue do Teorema de Green que:

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R r\vec{o}t\vec{F} \cdot \vec{k} = 0.$$

Ou seja, temos agora

Proposição 2.3. *Se $D \subset \mathbb{R}^2$ é domínio simplesmente conexo então um campo de classe $\mathcal{C}^1$ é conservativo se e somente se ele é irrotacional.*

temos então o seguinte quadro resumido para um campo de classe $\mathcal{C}^2$ em $D \subset \mathbb{R}^2$.

$\vec{F}(x,y)$ é conservativo $\Leftrightarrow \vec{F}(x,y)$ é gradiente $\Rightarrow \vec{F}(x,y)$ é irrotacional.

Além disso, **se D for simplesmente conexo**

$$\vec{F}(x,y) \text{ é conservativo } \Leftarrow \vec{F}(x,y) \text{ é irrotacional .}$$

Exemplo 2.4. *(Ex 12 - Lista 3) Mostre que cada campo abaixo é conservativo e calcule as integrais.*

(a) $\displaystyle\int_\gamma 7x^6y\,dx + x^7\,dy$ *sendo* $\gamma(t) = (t, e^{t^2-1})$, *onde* $t \in [0,1]$. *Resp. 1.*

(b) $\displaystyle\int_\gamma [\ln(x+y^2) - y]\,dx + [2y\ln(x+y^2) - x]\,dy$ *sendo* γ *a curva* $(x-2)^2 + y^2 = 1$ *com* $y \geq 0$ *orientada no sentido horário. Resp.* $3\ln 3 - 2$.