

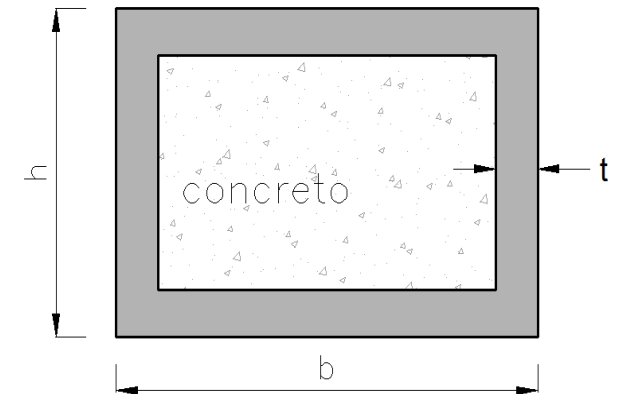
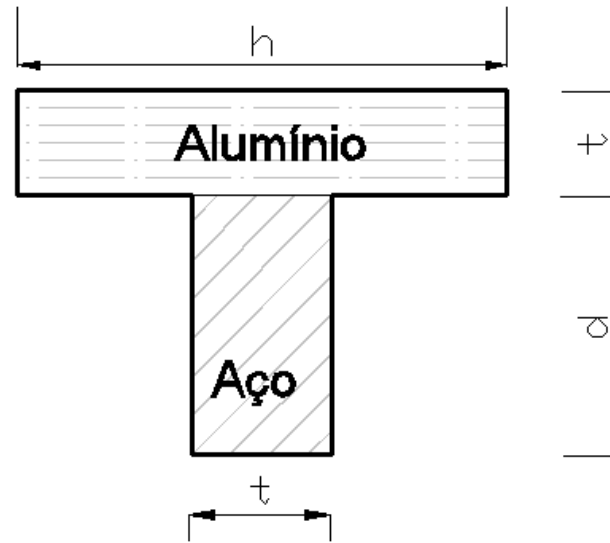
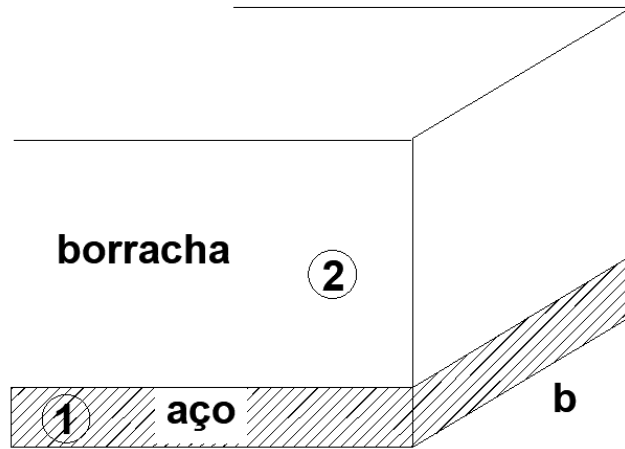
PEF 3202

FLEXÃO DE VIGAS COMPOSTAS DE DIFERENTES MATERIAIS

Valério S. Almeida
Novembro/2023

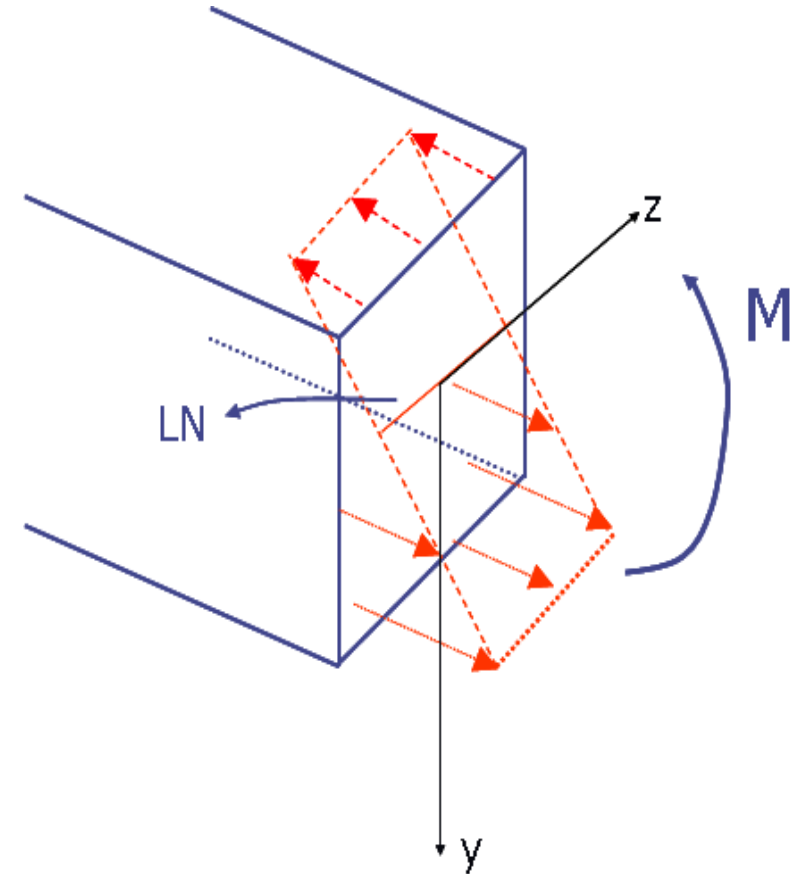
Vigas constituídas por dois ou mais materiais

Vigas constituídas por dois ou mais materiais são vigas compostas. Os engenheiros projetam estas vigas de propósito, para desenvolver um meio mais eficiente de suportar cargas aplicadas.



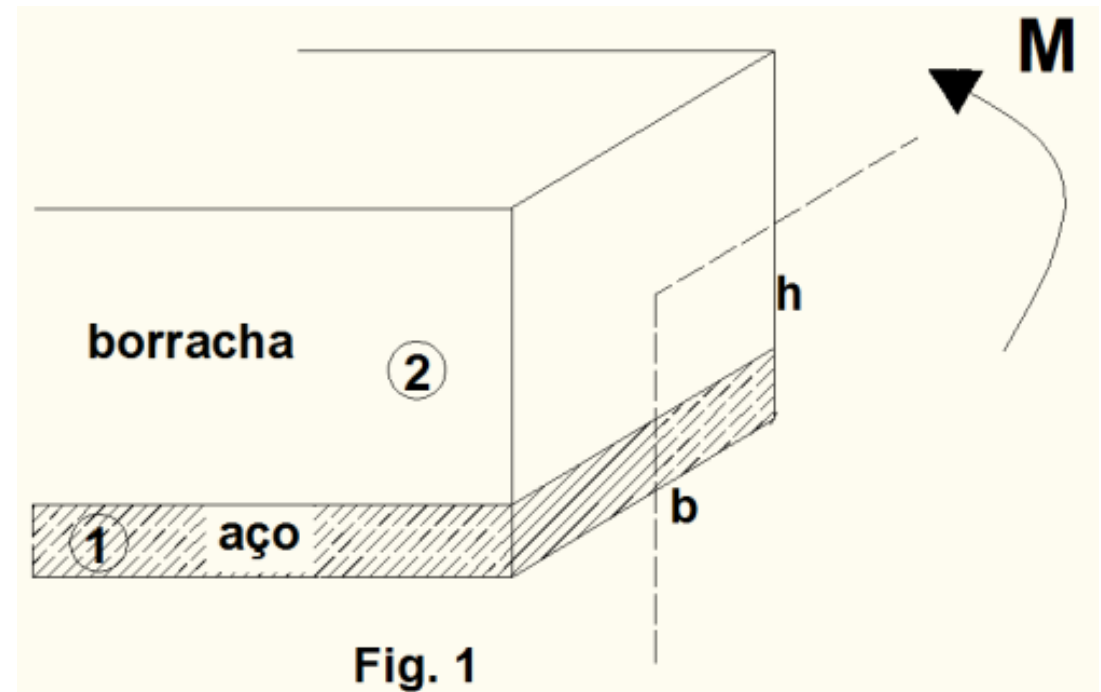
A fórmula de flexão foi desenvolvida para viga **formada apenas por um material (homogêneo)** não podendo ser aplicada diretamente essa relação da flexão pura na determinação da distribuição de tensões normais.

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$



Entretanto, desenvolveremos um método para modificar a seção transversal de modo a aplicar a relação clássica da flexão, usando o método da **seção transformada**.

Considere uma viga formada por dois materiais “1” e “2”



Admitindo que a sua seção transversal (ST) permaneça plana, assim, as deformações variam de forma linear ao longo da ST.

Pela lei de Hooke, sabe-se que:

$$\sigma_1 = E_1 \cdot \varepsilon \quad (\text{material 1})$$

$$\sigma_2 = E_2 \cdot \varepsilon \quad (\text{material 2})$$

(Eq.1)

Se $E_1 > E_2$ (aço e borracha), então:

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} \rightarrow \sigma_1 = E_1 \frac{\sigma_2}{E_2} \rightarrow \sigma_1 > \sigma_2 \quad (\text{Eq.2})$$

Assim, a maior parte da carga vai ser absorvida pelo material “1” e a variação na flexão fica indicado na figura 2.

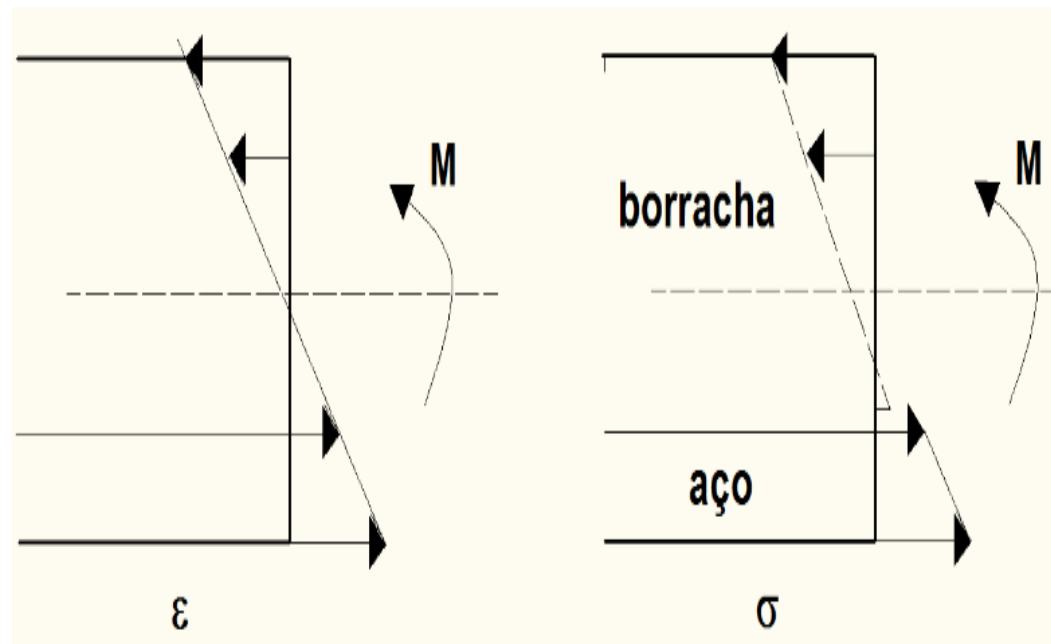
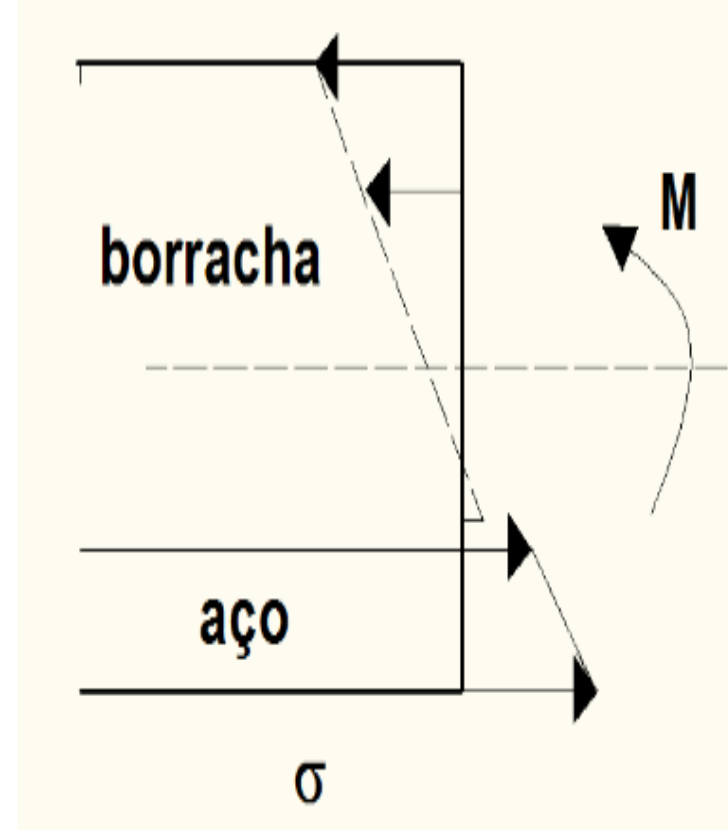


Fig.2

Observe o salto na tensão que ocorre na junção entre os materiais. A determinação das tensões em cada material pode ser obtida usando várias técnicas, por exemplo, por um processo iterativo, devendo satisfazer as seguintes condições:

- i) A tensão produz uma força resultante nula na ST: $(F_1 + F_2) = 0$;
- ii) O momento produzido na ST tem que ter resultante (M): $(2.F_1.y) = \mathbf{M}$.



Contudo, um modo mais simples de cumprir essas duas premissas é transformar a viga composta em outra, feita apenas de um único material, transformando um dos materiais em outro equivalente ao material fixado.

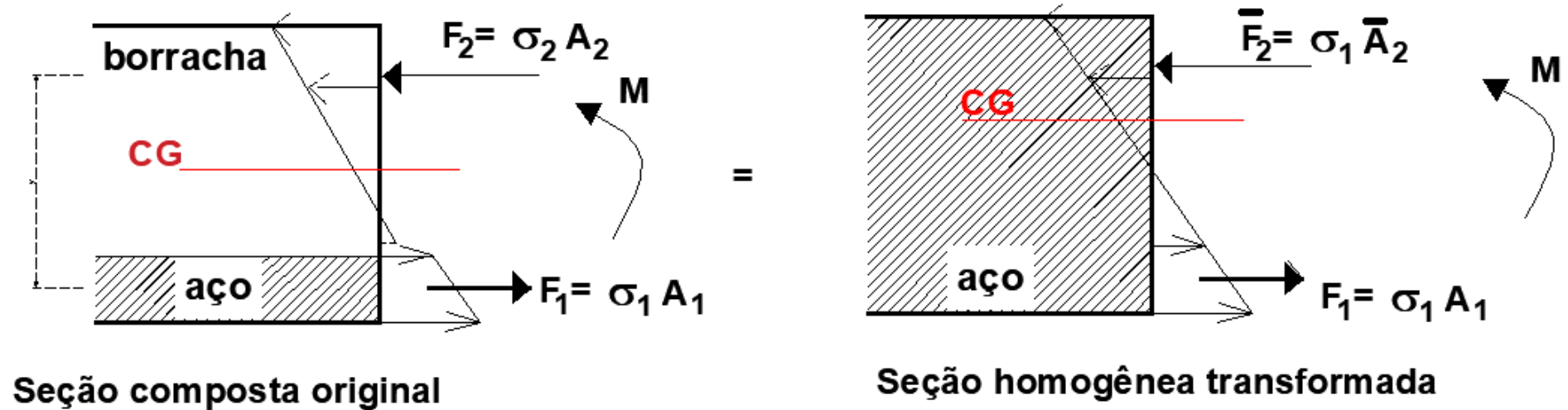
Isso pode ser feito assumindo que a altura de cada região do material seja a mesma, mas alterando-se a largura da região do material a ser modificada.

No exemplo da figura 1, suponha que queiramos **fixar o material 1**, que é mais rígido ($E_1 > E_2$), de forma que a área da região do material 2 seja modificado para o material 1, mas que mantenha a mesma resultante de força do problema original, assim:

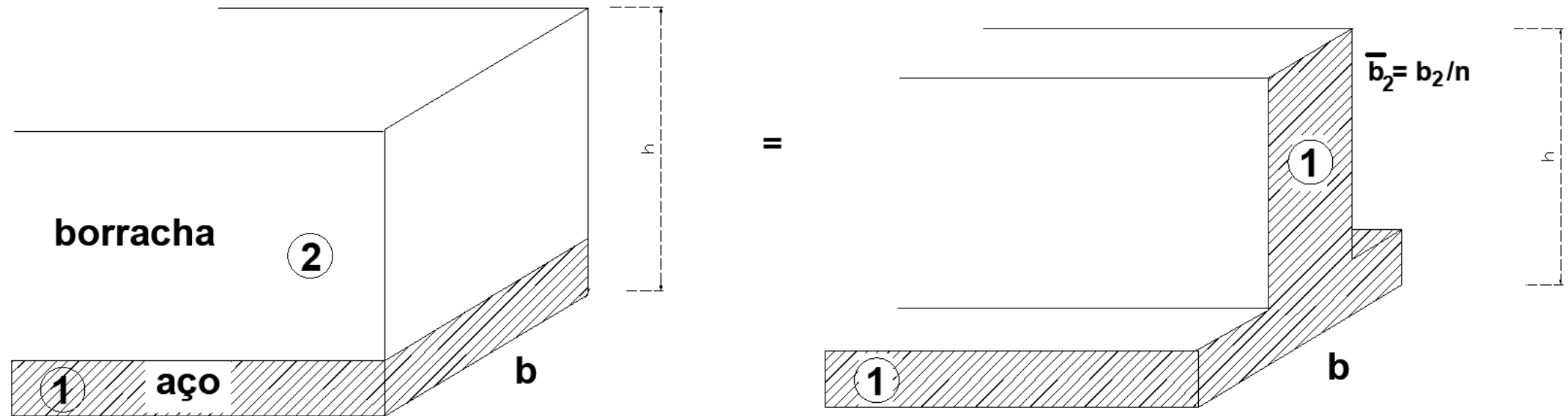
Transformar a seção (A_2) do material 2 em outra equivalente ($\bar{A}_2$) em termos da tensão do material 1

Pode-se manter a altura da seção e modificar a largura

$$F_2 = \bar{F}_2 \rightarrow \sigma_2 \cdot A_2 = \sigma_1 \cdot \bar{A}_2 \rightarrow E_2 \cdot \varepsilon \cdot b_2 \cdot h_2 = E_1 \cdot \varepsilon \cdot \bar{b}_2 \cdot h_2 \quad (\text{Eq.3})$$



Basta assim, modificar a largura da região do material “2”, de forma que fora transformado para o material “1”.



$$\overline{b}_2 = \frac{E_2}{E_1} \cdot b_2 \rightarrow \overline{b}_2 = \frac{b_2}{n} \quad (\text{Eq.4})$$

Com $n = \frac{E_1}{E_2}$ denominado de **fator de transformação**.

Dessa forma, pode-se aplicar diretamente a fórmula da flexão:

$$\sigma_1 = \frac{M.y}{I_z} \quad (\text{Eq.5}) \quad (\text{material 1})$$

para o trecho do material fixo, no exemplo material “1”.

Para a região onde se tem o material “2”, as tensões são calculadas a partir da equação 5, mas com o uso da equação 2, deve ser corrigida, levando a:

$$\sigma_2 = \frac{1}{n} \frac{M.y}{I_z} \quad (\text{Eq.5}) \quad (\text{material 2})$$

Resumo

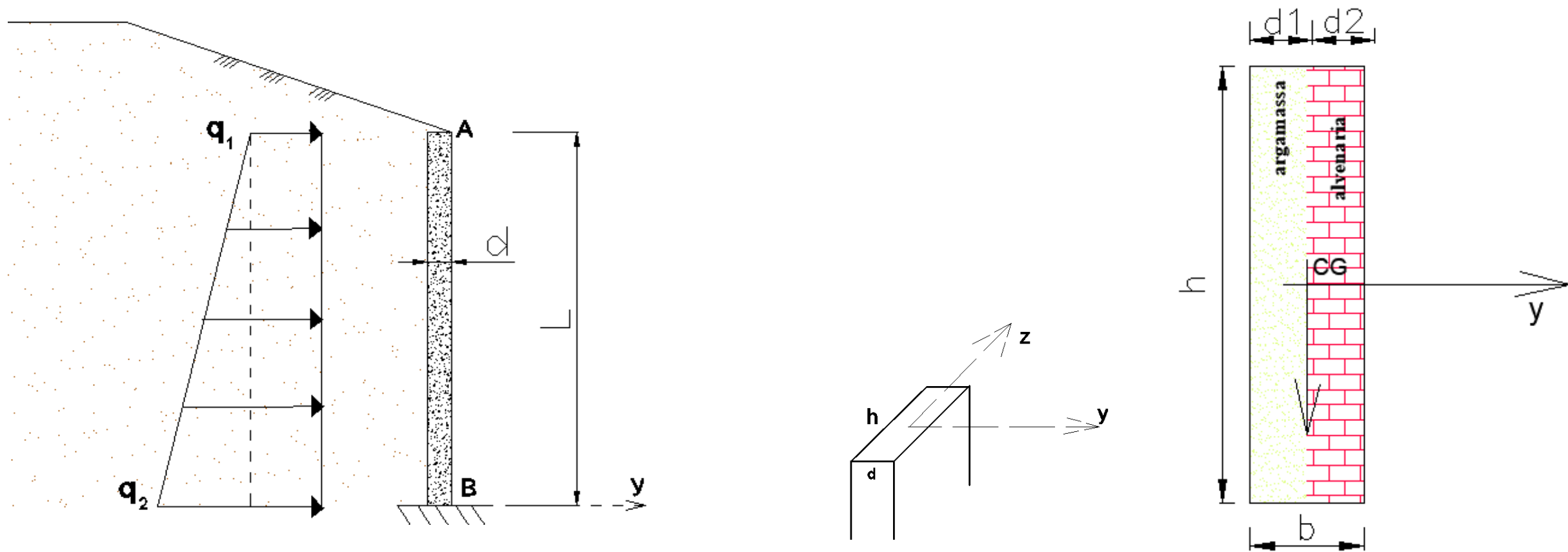
- 1) Para uma seção de 2 materiais A e B. Fixe uma das seções, por exemplo: A;
- 2) Calcule $n = E_A/E_B$ e transforme a largura da seção B: $b_B = b_B/n$;
- 3) Obtenha na nova seção seu CG e I_z ;
- 4) Para trechos do material A: $\sigma_{A_y} = \frac{M.y}{I_z}$

$$\text{Para trechos do material B: } \sigma_{B_y} = \frac{1}{n} \cdot \frac{M.y}{I_z}$$

Obs.: Para o caso de “ j ” seções de materiais diferentes, siga o resumo, mas se terá “ $j-1$ ” n_s , onde $n_i = E_k/E_i$, com k sendo a seção fixada e i as demais.

Exemplo: A estrutura de contenção esta submetida a uma ação de empuxo do solo, onde a distribuição é linear de valores que variam de $q_1 = 10 \text{ kN/m}$ a $q_2 = 30 \text{ kN/m}$, atuando na direção do eixo z , conforme figura 3.24. Sabe-se que a altura L é 5 m. Determine as máximas tensões normais de tração e compressão da estrutura. Desconsidere o peso próprio da estrutura.

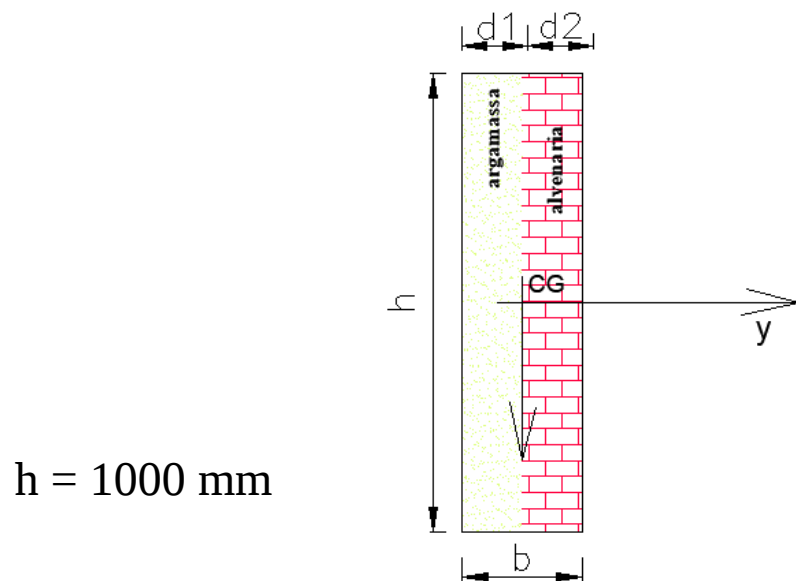
Considere a seção transversal da figura. Adote: $h = 1000 \text{ mm}$ e $d_1 = 30 \text{ mm}$, $d_2 = 90 \text{ mm}$, com $d_1 + d_2 = b$, $E_{\text{argamassa}} = 6,9 \text{ GPa}$ e $E_{\text{alvenaria}} = 13,8 \text{ GPa}$.



O maior momento fletor é na seção junto ao engaste, o qual pode ser obtido por equilíbrio, dividindo o carregamento trapezoidal em um trecho retangular e outro triangular, de modo que o momento é dado por: $M = 208,33 \text{ kN.m}$.

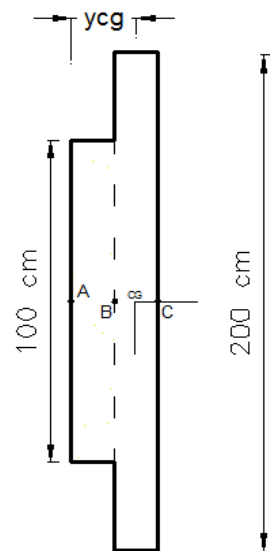
A seção transformada é homogeneizada para a argamassa, assim: $\eta = \frac{6,9}{13,8} = 0,5$

De modo que a largura da alvenaria fica alterada para: $h_{alv} = \frac{1000}{0,5} = 2000 \text{ mm}$



$h = 1000 \text{ mm}$

Seção composta original



Seção transformada

As características geométricas da nova seção são dadas por:

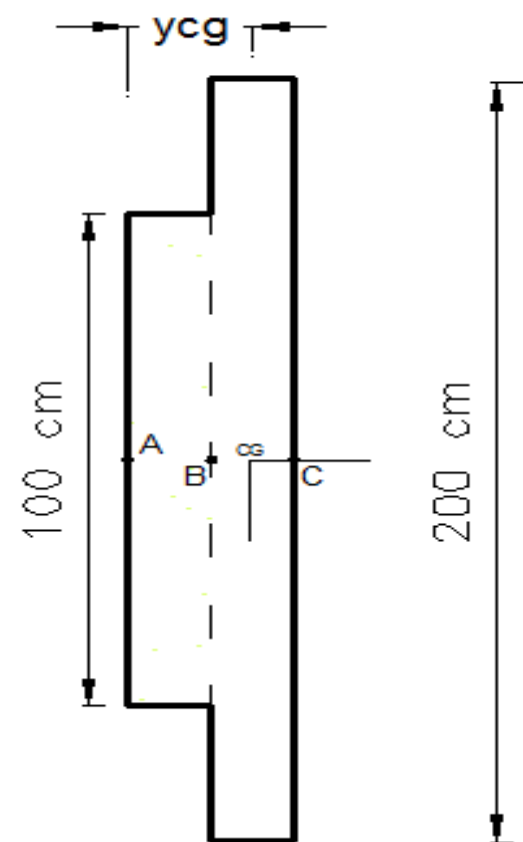
$$y_{CG} = 6,6429 \text{ cm}$$

$$I_{ZCG} = 21.632,14 \text{ cm}^4$$

Assim, as tensões nos pontos **A e B na argamassa** são dadas por:

$$\sigma_A = \frac{M.y}{I_z} = \frac{-208,33.(-0,06429)}{21.632,14.10^{-8}} = 61,915.10^3 = 61,92 \text{ MPa (tração)}$$

$$\sigma_B = \frac{M.y}{I_z} = \frac{-208,33.(-0,036429)}{21.632,14.10^{-8}} = 35,08 \text{ MPa (tração)}$$

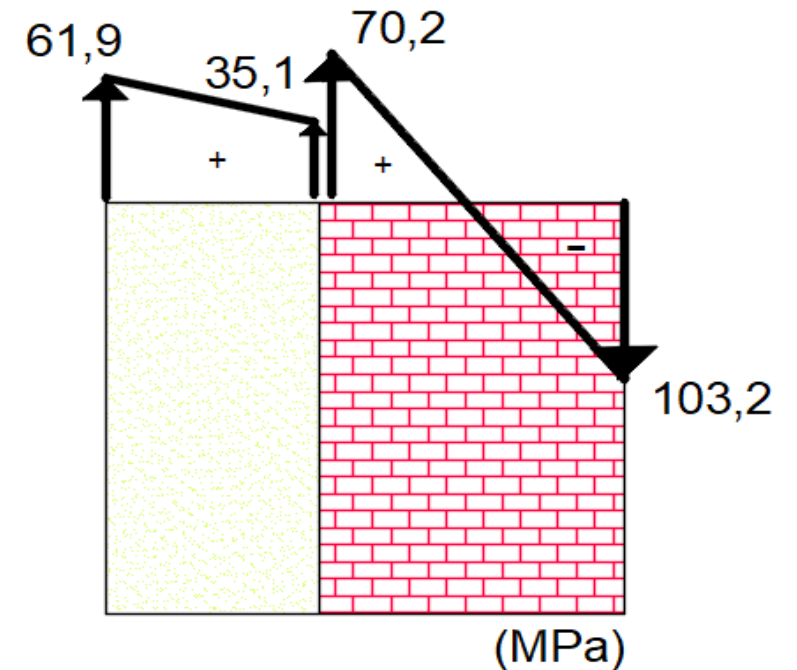
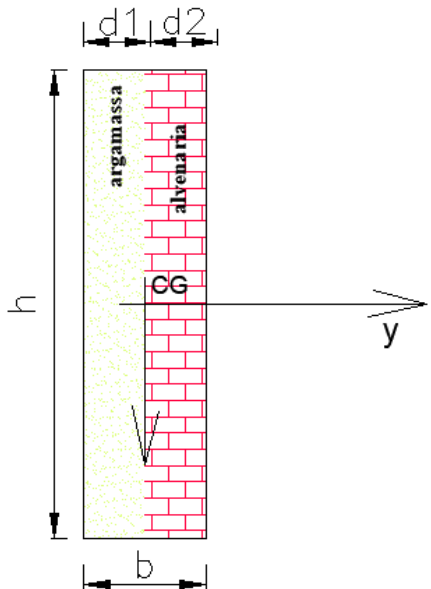


Seção transformada

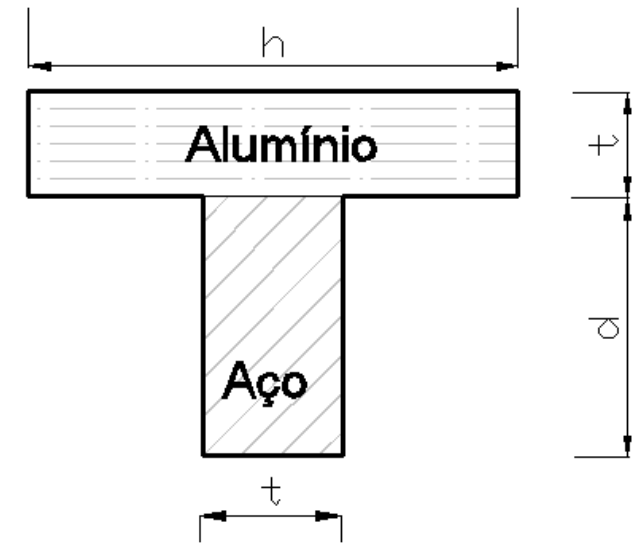
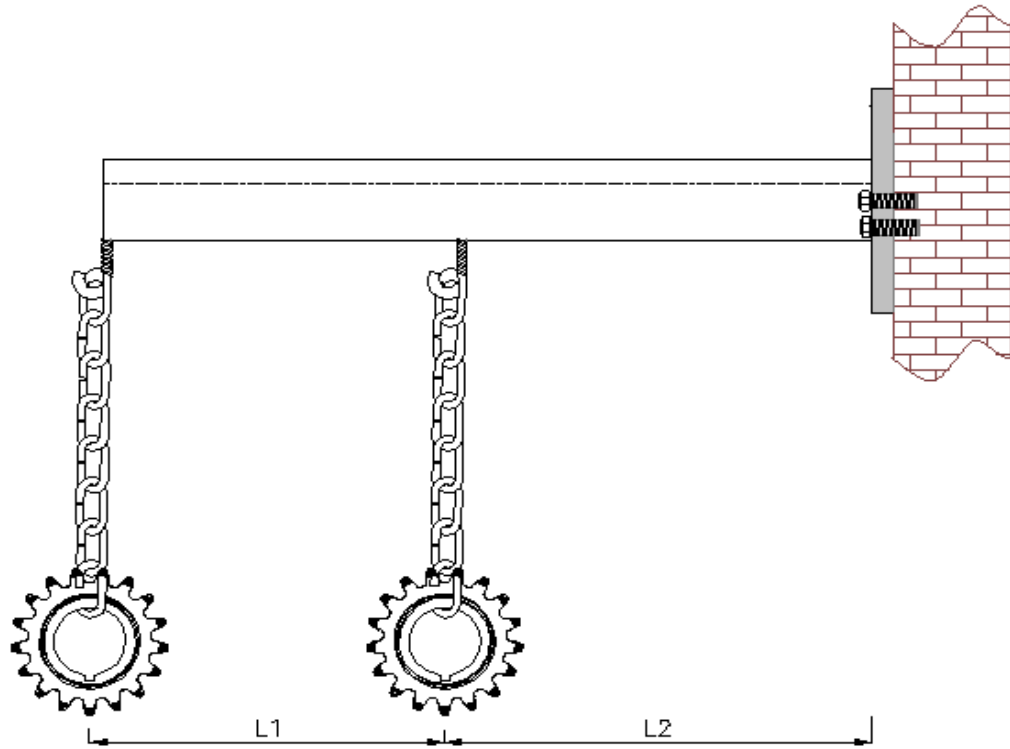
As tensões nos pontos **B** e **C** na **alvenaria** são dadas por:

$$\sigma_B = \frac{35,08}{0,5} = 70,16 \text{ MPa (tração)}$$

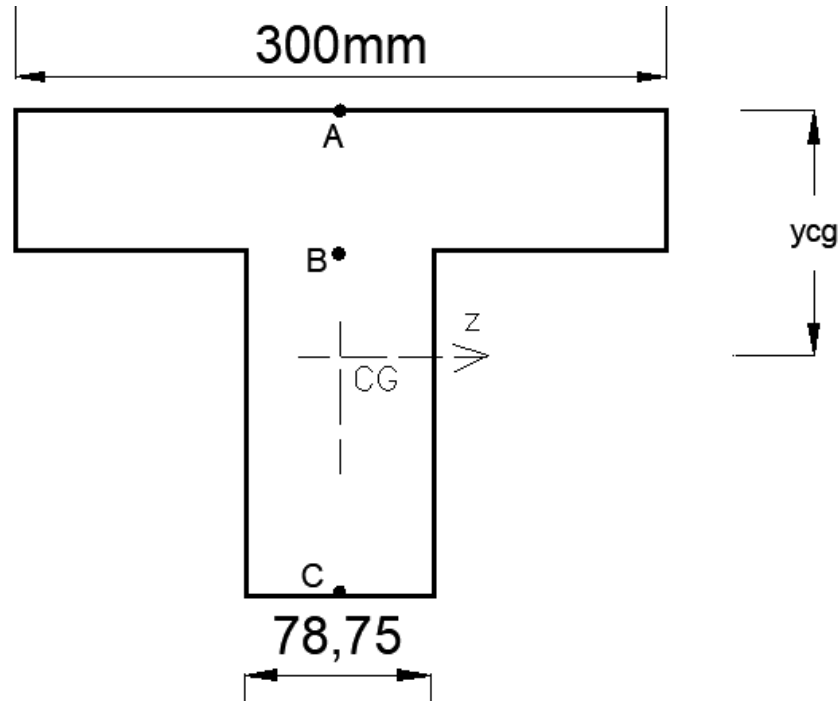
$$\sigma_C = \frac{-208,33.(0,053571)}{21.632,14.10^{-8}} \cdot \frac{1}{0,5} = -103,18 \text{ MPa (compressão)}$$



Exemplo: Para a viga em balanço, determinar a carga máxima admissível de cada peso do conjunto corrente/engrenagem (P) que podem ser suportadas com segurança pela viga, adotando a seção composta da figura. Adote: $t = 30 \text{ mm}$, $d = h = 300 \text{ mm}$, $E_{\text{aço}} = 210 \text{ GPa}$, $E_{\text{alumínio}} = 80 \text{ GPa}$, $\bar{\sigma}_{\text{aço}} = 240 \text{ MPa}$ e $\bar{\sigma}_{\text{alumínio}} = 400 \text{ MPa}$. Adote $L1 = L2 = 2 \text{ m}$.



A seção transformada é homogeneizada para o alumínio, assim: $\eta = \frac{80}{210} = 0,381$. De modo que a largura da região do aço fica alterada para: $t_{aço} = \frac{30}{0,381} = 78,75 \text{ mm}$. As características geométricas da nova seção são dadas por: $y_{CG} = 134,48 \text{ mm}$ e $I_{ZCG} = 355.294.396,5 \text{ mm}^4$.



Seção transformada e seu centroide.

Assim, a **tensão máxima no alumínio** é no ponto A:

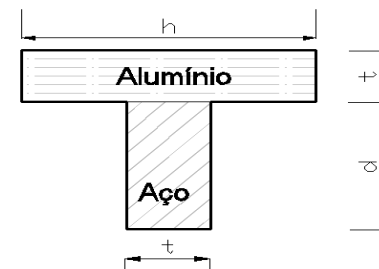
$$\sigma_A = \frac{M \cdot y}{I_z} = \frac{6P \cdot (0,13448)}{355.294.396,5 \cdot 10^{-12}} \leq \bar{\sigma}_t = 400 \cdot 10^3 \rightarrow P \leq 176,1 \text{ kN}$$

Verificando as tensões no ponto **B e C no aço**:

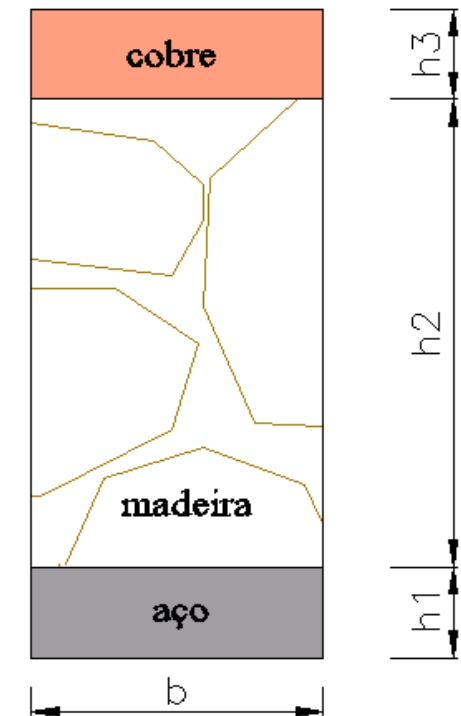
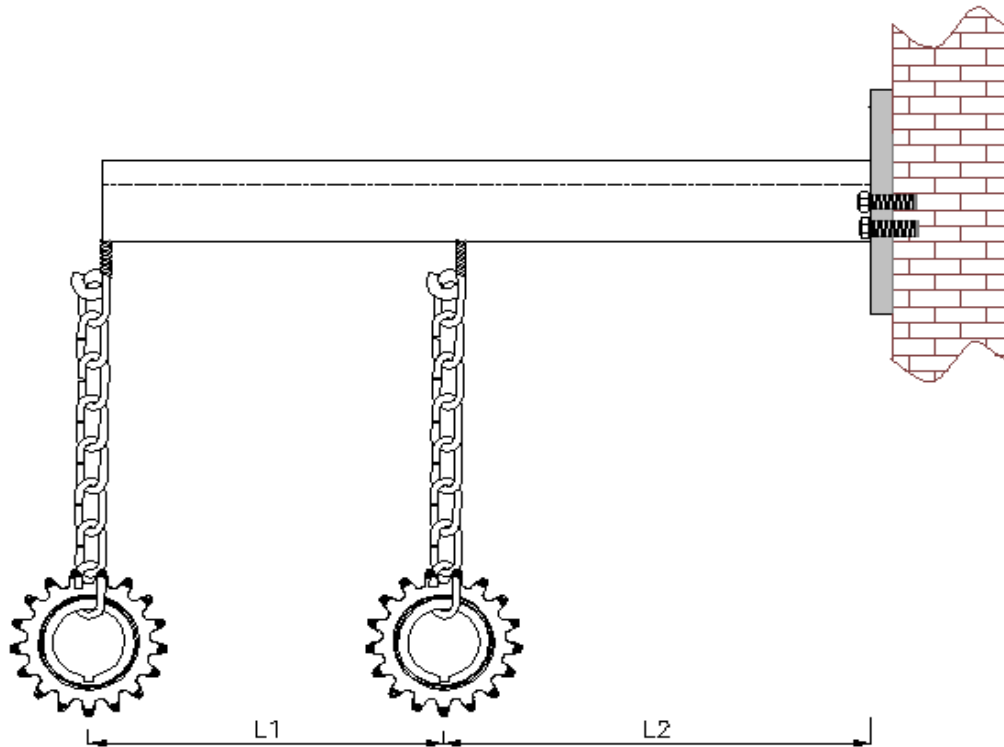
$$\sigma_B = \frac{6P \cdot (0,10448)}{355.294.396,5 \cdot 10^{-12}} \frac{1}{0,381} \leq \bar{\sigma}_t = 240 \cdot 10^3 \rightarrow P \leq 51,8 \text{ kN}$$

$$\sigma_C = \frac{6P \cdot (0,19552)}{355.294.396,5 \cdot 10^{-12}} \frac{1}{0,381} \leq \bar{\sigma}_t = 240 \cdot 10^3 \rightarrow P \leq 27,7 \text{ kN}$$

Portanto: **$P_{max} = 27,7 \text{ kN}$**

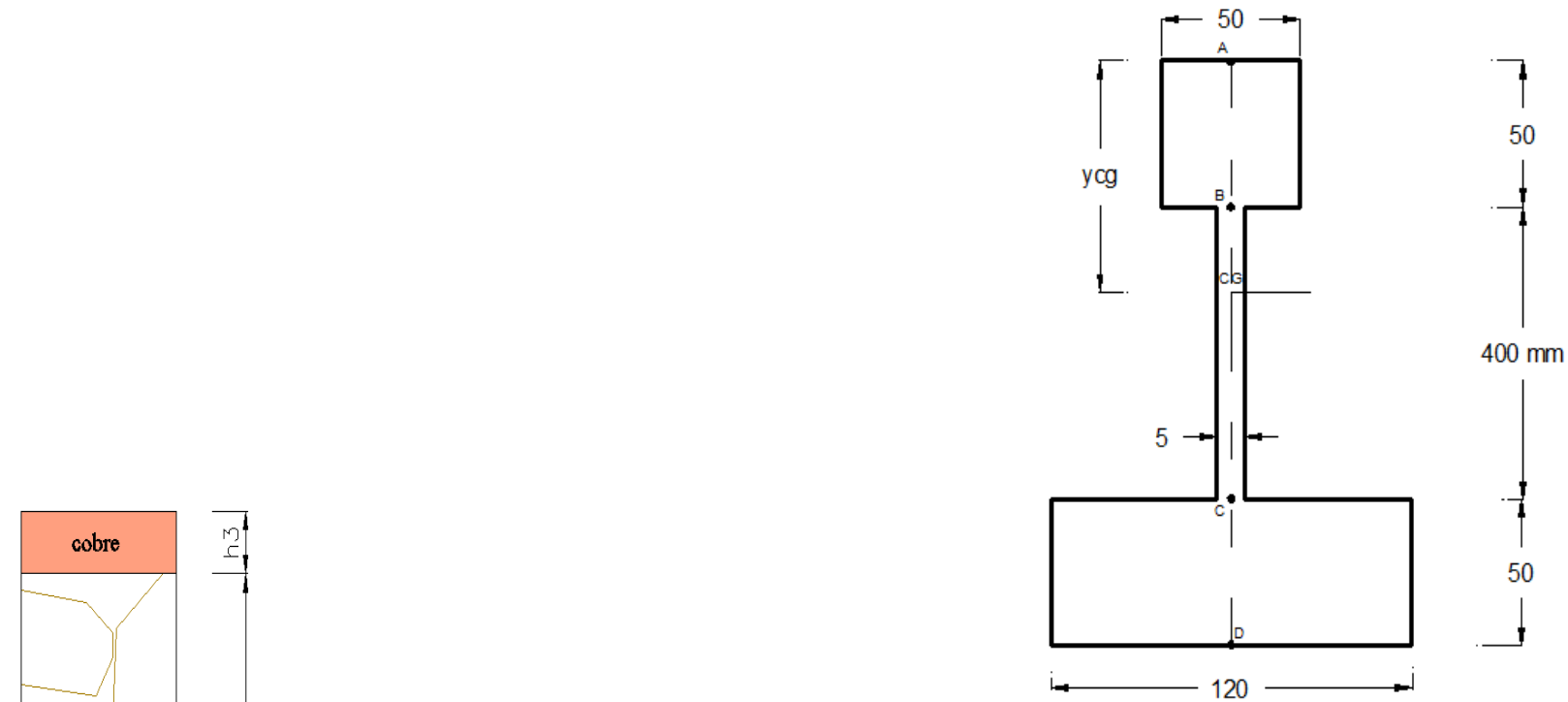


Exemplo: Para a viga em balanço, determinar a carga máxima admissível de cada peso do conjunto corrente/engrenagem (P) que podem ser suportadas com segurança pela viga, adotando a seção composta da figura. Adote: $b = 120 \text{ mm}$, $h_1 = h_3 = 50 \text{ mm}$, $h_2 = 400 \text{ mm}$, $E_{\text{aço}} = 240 \text{ GPa}$, $E_{\text{madeira}} = 10 \text{ GPa}$, $E_{\text{cobre}} = 100 \text{ GPa}$, $\bar{\sigma}_{\text{aço}} = 240 \text{ MPa}$, $\bar{\sigma}_{\text{cobre}} = 80 \text{ MPa}$ e $\bar{\sigma}_{\text{madeira}} = 8 \text{ MPa}$. Considere $L_1 = L_2 = 2 \text{ m}$.



Seção retangular composta por três materiais

A seção transformada é homogeneizada para o aço, assim: $\eta_{cobre/aço} = \frac{240}{100} = 2,4$ e $\eta_{madeira/aço} = \frac{240}{10} = 24$. De modo que as larguras das regiões do cobre e madeira ficam alteradas para: $b_{cobre} = 50 \text{ mm}$ e $b_{madeira} = 5 \text{ mm}$. As características geométricas da nova seção são dadas por: $y_{CG} = 325 \text{ mm}$ e $I_{ZCG} = 399.687.500 \text{ mm}^4$.



Seção transformada e seu centroide

Assim, avaliar as tensões nos pontos A, B,C e D da seção crítica, ver figura:

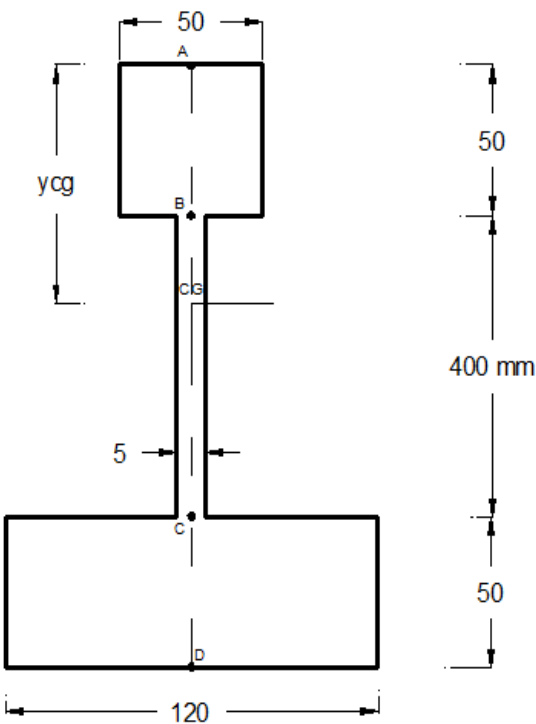
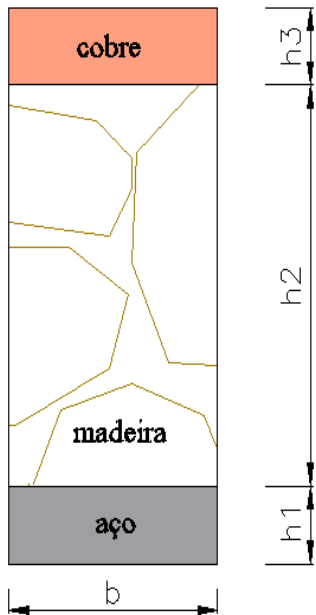
$$\sigma_A = \frac{M \cdot y}{I_z} \eta_{\text{cobre/aço}} = \frac{6P \cdot (0,325)}{399.687.500 \cdot 10^{-12}} / 2,4 \leq \bar{\sigma}_{\text{cobre}} = 80 \cdot 10^3 \rightarrow P \leq 39,3 \text{ kN}$$

$$\sigma_B = \frac{M \cdot y}{I_z} \eta_{\text{madeira/aço}} = \frac{6P \cdot (0,275)}{399.687.500 \cdot 10^{-12}} / 24 \leq \bar{\sigma}_{\text{madeira}} = 8 \cdot 10^3 \rightarrow P \leq 46,5 \text{ kN}$$

$$\sigma_C = \frac{M \cdot y}{I_z} \eta_{\text{madeira/aço}} = \frac{6P \cdot (0,125)}{399.687.500 \cdot 10^{-12}} / 24 \leq \bar{\sigma}_{\text{madeira}} = 8 \cdot 10^3 \rightarrow P \leq 102,3 \text{ kN}$$

$$\sigma_D = \frac{M \cdot y}{I_z} = \frac{6P \cdot (0,175)}{399.687.500 \cdot 10^{-12}} \leq \bar{\sigma}_{\text{aço}} = 240 \cdot 10^3 \rightarrow P \leq 91,4 \text{ kN}$$

Portanto: $P_{max} = 39,3 \text{ kN}$



Uma barra obtida unindo-se duas peças de aço ($E_{aço} = 203 \text{ GPa}$) e latão ($E_{latão} = 105 \text{ GPa}$) tem a seção transversal mostrada na Fig. 4.27. Determine a tensão máxima no aço e no latão quando a barra estiver em flexão pura com um momento fletor $M = 4,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

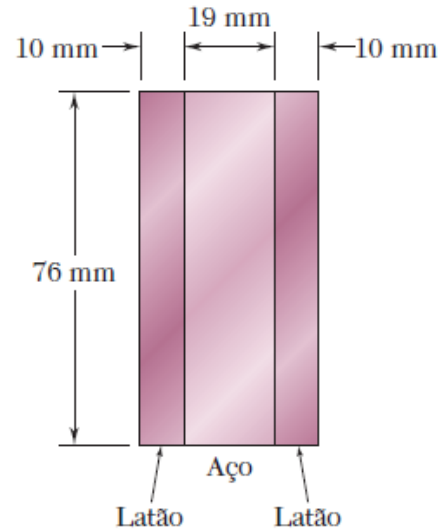
A seção transformada correspondente a uma barra equivalente feita inteiramente de latão é mostrada na Fig. 4.28. Como

$$n = \frac{E_{aço}}{E_{latão}} = \frac{203 \text{ GPa}}{105 \text{ GPa}} = 1,933$$

a largura da parte central de latão, que substitui a parte de aço original, é obtida multiplicando-se a largura original por 1,933, temos

$$(19 \text{ mm})(1,933) = 36,7 \text{ mm}$$

Note que essa variação na dimensão ocorre em uma direção paralela à linha neutra. O momento de inércia da seção transformada



em relação ao seu eixo que passa pelo centroide da seção é

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(0,567 \text{ m})(0,076 \text{ m})^3 = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

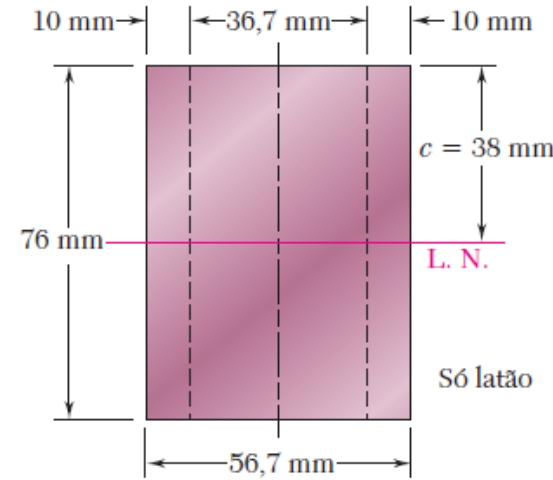
e a distância máxima da linha neutra é $c = 0,038 \text{ m}$. Usando a Equação (4.15), encontramos a tensão máxima na seção transformada:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(4,5 \text{ kN} \cdot \text{m})(0,038 \text{ m})}{2 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 85,5 \text{ MPa}$$

O valor obtido também representa a tensão máxima na parte de latão da barra composta original. No entanto, a tensão máxima na parte de aço será maior que o valor obtido para a seção transformada, pois a área da parte central deve ser reduzida pelo coeficiente $n = 1,933$ quando retornamos da seção transformada para a original. Concluimos então que

$$(\sigma_{latão})_{máx} = 85,5 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_{aço})_{máx} = (1,933)(85,5 \text{ MPa}) = 165,3 \text{ MPa}$$



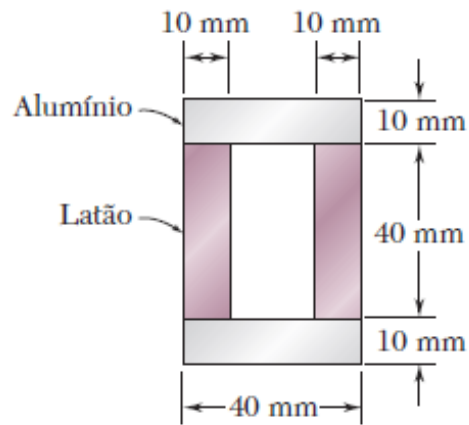


Fig. P4.33

4.33 e 4.34 Uma barra com a seção transversal mostrada na figura foi construída unindo-se firmemente latão e alumínio. Usando os dados fornecidos abaixo, determine o maior momento fletor admissível quando a barra composta é flexionada em torno do eixo horizontal.

	Alumínio	Latão
Módulo de elasticidade	70 GPa	105 GPa
Tensão admissível	100 MPa	160 MPa

Resposta: (4.33) $M = 2,22 \text{ kNm}$

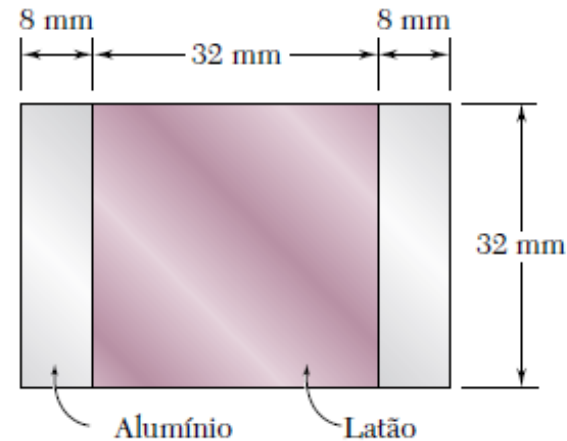


Fig. P4.34