Análise de sistemas

Maria M. Gamboa

2º Semestre de 2023. 13/11/2023

Problemas em recursos hídricos e saneamento

Um projeto de recursos hídricos e saneamento pode ser avaliado segundo critérios:

- econômicos

Problemas em recursos hídricos e saneamento

Um projeto de recursos hídricos e saneamento pode ser avaliado segundo critérios:

- econômicos
- ambientais

Problemas em recursos hídricos e saneamento

Um projeto de recursos hídricos e saneamento pode ser avaliado segundo critérios:

- econômicos
- ambientais
- ecológicos

Problemas em recursos hídricos e saneamento

Um projeto de recursos hídricos e saneamento pode ser avaliado segundo critérios:

- econômicos
- ambientais
- ecológicos
- sociais

Problemas em recursos hídricos e saneamento

Um projeto de recursos hídricos e saneamento pode ser avaliado segundo critérios:

- econômicos
- ambientais
- ecológicos
- sociais

Comumente: Múltiplos critérios.

Problemas em recursos hídricos e saneamento

Um projeto de recursos hídricos e saneamento pode ser avaliado segundo critérios:

- econômicos
- ambientais
- ecológicos
- sociais

Comumente: Múltiplos critérios. Existem ainda critérios quantificáveis e não quantificáveis.

Avaliação em recursos hídricos e saneamento

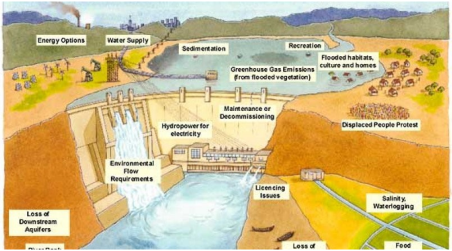
Critérios comumente relacionados a diferentes pontos de vista

Avaliação em recursos hídricos e saneamento

Objetivos podem ser conflituantes (ou não)

Avaliação em recursos hídricos e saneamento

Objetivos podem ser conflituantes (ou não)
Exemplo comum: reservatório de usos múltiplos.



Avaliação em recursos hídricos e saneamento

Problema complexo tem múltiplas soluções possíveis

Avaliação em recursos hídricos e saneamento

Problema complexo tem múltiplas soluções possíveis

Como saber se uma solução é melhor que outra num problema de múltiplos objetivos/critérios conflitantes?

Avaliação em recursos hídricos e saneamento

Problema complexo tem múltiplas soluções possíveis

Como saber se uma solução é melhor que outra num problema de múltiplos objetivos/critérios conflitantes?
Critério de DOMINÂNCIA

Dominância

Critério de dominância: Não para 'achar' a 'melhor' solução, mas para comparar soluções em problemas com vários objetivos/critérios conflitantes.

Dominância

Critério de dominância: Não para 'achar' a 'melhor' solução, mas para comparar soluções em problemas com vários objetivos/critérios conflitantes.

Uma solução 'boa', ou **eficiente**, é uma solução **factível** e **não dominada**.

Dominância

Critério de dominância: Não para 'achar' a 'melhor' solução, mas para comparar soluções em problemas com vários objetivos/critérios conflitantes.

Uma solução 'boa', ou **eficiente**, é uma solução **factível** e **não dominada**.

Dominância

Uma solução **X** domina outra solução **Y** se o resultado para cada uma das funções objetivo com **X** é igual ou menor [a] do que com **Y**, sendo estritamente menor para pelo menos um dos objetivos.

[a] se tratando de um problema de minimização

Dominância - Representação gráfica

Mapeamento do espaço de variáveis de decisão no espaço de objetivos.

Lembrar:

- Variáveis de decisão
- Restrições
- Dimensionalidade
- Região factível
- Espaço de objetivos

Dominância - Representação matemática

minimizar $F(X) = [f_1(X), f_2(X), ...f_m(X)]^T$

com, $X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T \in \mathbb{R}^n$

Seja S : Conjunto de soluções factíveis (região factível)

$A, B, C \in S$

Dominância - Representação matemática

$$\text{minimizar } F(X) = [f_1(X), f_2(X), ... f_m(X)]^T$$
$$\text{com, } \quad X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T \in \mathbb{R}^n$$
Seja S : Conjunto de soluções factíveis (região factível)
$$A, B, C \in S$$

$A \succ B$ $\quad A$ domina B se: $\quad f_i(A) < f_i(B) \, \forall \, f_i \in F$

$A \succeq B$ $\quad A$ domina fracamente B se: $\quad f_i(A) \leq f_i(B) \, \forall \, f_i \in F$

$A \prec B$ $\quad A$ é dominado por B se: $\quad f_i(B) < f_i(A) \, \forall \, f_i \in F$

$A \sim B$ $\quad A$ é indiferente a B se:

$f_i(A) < f_i(B)$ para pelo menos um $f_i \in F$

e $f_j(A) > f_j(B)$ para pelo menos um $f_j \in F$

Dominância - Resultados

minimizar $F(X) = [f_1(X), f_2(X), ...f_m(X)]^T$

Seja S : Conjunto de soluções factíveis (região factível)

$A, B, C \in S$

Dominância - Resultados

minimizar $F(X) = [f_1(X), f_2(X), ...f_m(X)]^T$

Seja S : Conjunto de soluções factíveis (região factível)

$A, B, C \in S$

$$A \succ C \quad \forall \quad C \neq A \quad \rightarrow A = X^* = \text{sol. ótima}$$

se existe uma única solução A que domina TODAS as outras soluções de S, essa é a solução ótima

Dominância - Resultados

minimizar $F(X) = [f_1(X), f_2(X), ...f_m(X)]^T$

Seja S : Conjunto de soluções factíveis (região factível)

$A, B, C \in S$

$$A \succ C \quad \forall \quad C \neq A \quad \rightarrow A = X^* = \text{sol. ótima}$$

se existe uma única solução A que domina TODAS as outras soluções de S, essa é a solução ótima ... mas é muito raro isso acontecer!

Dominância - Resultados

$$\text{minimizar } F(X) = [f_1(X), f_2(X), ...f_m(X)]^T$$

Seja S : Conjunto de soluções factíveis (região factível)

$$A, B, C \in S$$

$$A \succ C \quad \forall \quad C \neq A \quad \rightarrow A = X^* = \text{sol. ótima}$$

se existe uma única solução A que domina TODAS as outras soluções de S, essa é a solução ótima ... mas é muito raro isso acontecer!

Comumente existem:

- Soluções não dominadas: eficientes, não inferiores, Pareto ótimas, ou Pareto eficientes. Constituem a frente Pareto
- Soluções dominadas / subótimas

Dominância

Soluções não dominadas: eficientes, não inferiores, Pareto ótimas, ou Pareto eficientes. Constituem a frente Pareto

Dominância

Soluções não dominadas: eficientes, não inferiores, Pareto ótimas, ou Pareto eficientes. Constituem a frente Pareto

- $$B \prec C \text{ para NENHUM } C \in S$$

Dominância

Soluções não dominadas: eficientes, não inferiores, Pareto ótimas, ou Pareto eficientes. Constituem a frente Pareto

- $$B \prec C \text{ para NENHUM } C \in S$$
- Não pode se melhorar em um sentido, sem piorar em outro

Dominância

Soluções não dominadas: eficientes, não inferiores, Pareto ótimas, ou Pareto eficientes. Constituem a frente Pareto

- $$B \prec C \text{ para NENHUM } C \in S$$
- Não pode se melhorar em um sentido, sem piorar em outro
- Não existem entre elas ordenamento, segundo os objetivos definidos

Dominância

Soluções não dominadas: eficientes, não inferiores, Pareto ótimas, ou Pareto eficientes. Constituem a frente Pareto

- $$B \prec C \text{ para NENHUM } C \in S$$
- Não pode se melhorar em um sentido, sem piorar em outro
- Não existem entre elas ordenamento, segundo os objetivos definidos

Soluções dominadas / subótimas, não pertencem à frente Pareto

Dominância

Soluções não dominadas: eficientes, não inferiores, Pareto ótimas, ou Pareto eficientes. Constituem a frente Pareto

- $$B \prec C \text{ para NENHUM } C \in S$$
- Não pode se melhorar em um sentido, sem piorar em outro
- Não existem entre elas ordenamento, segundo os objetivos definidos

Soluções dominadas / subótimas, não pertencem à frente Pareto

- $$B \prec C \text{ para PELO MENOS UM } C \in S$$

Dominância

Soluções não dominadas: eficientes, não inferiores, Pareto ótimas, ou Pareto eficientes. Constituem a frente Pareto

- $$B \prec C \text{ para NENHUM } C \in S$$
- Não pode se melhorar em um sentido, sem piorar em outro
- Não existem entre elas ordenamento, segundo os objetivos definidos

Soluções dominadas / subótimas, não pertencem à frente Pareto

- $$B \prec C \text{ para PELO MENOS UM } C \in S$$
- Podem ser desconsideradas **para os objetivos analisados**

Exercício canal

Considere o projeto de um canal aberto para drenagem pluvial, supondo escoamento permanente e uniforme, para vazão de projeto de $35m^3/s$. A seção será trapezoidal, podendo alterar declividade dos taludes e largura da base.
O canal será escavado em terreno que tem camada de $2m$ de profundidade de solo acima de rocha. O revestimento será concreto com $n = 0.015$ e a declividade longitudinal $I_0 = 0.0005$. A profundidade será 110% da altura da lâmina d'água (borda livre), e não pode ser superior a $5m$ nem inferior a $0,5m$, enquanto a largura de topo não pode ser superior a $20m$.

Exercício canal

Na seleção do projeto deverá ser considerado, além do correto funcionamento hidráulico, o custo da obra (por metro linear), E O IMPACTO NA REGIÃO. O custo da escavação (e custos associados) foi estimado em $30\$R/m^3$ em rocha e $15\$R/m^3$ em solo. O revestimento custa $40R\$/m^2$. O impacto pode ser considerado proporcional à área superficial ocupada pela obra.
(ATENÇÃO! Valores podem não ser condizentes com a realidade, nem sequer em ordem de grandeza!)

Análise multicriterial

Critério de dominância é útil para comparar soluções **conhecidas**

Análise multicriterial

Critério de dominância é útil para comparar soluções **conhecidas**

É preciso gerar as soluções. Cómo não deixar de fora nenhuma das não domindas?

Análise multicriterial

Critério de dominância é útil para comparar soluções **conhecidas**

É preciso gerar as soluções. Cómo não deixar de fora nenhuma das não domindas?

Por outro lado...

Análise multicriterial

Critério de dominância é útil para comparar soluções **conhecidas**

É preciso gerar as soluções. Cómo não deixar de fora nenhuma das não domindas?

Por outro lado...

Soluções Não Dominadas oferecem uma informação importante, mas sem ordenamento entre elas.

Análise multicriterial

Critério de dominância é útil para comparar soluções **conhecidas**

É preciso gerar as soluções. Cómo não deixar de fora nenhuma das não domindas?

Por outro lado...

Soluções Não Dominadas oferecem uma informação importante, mas sem ordenamento entre elas.
Para escolher, é necessário incorporar algum juízo de valor.

Análise multicriterial

Critério de dominância é útil para comparar soluções **conhecidas**

É preciso gerar as soluções. Cómo não deixar de fora nenhuma das não domindas?

Por outro lado...

Soluções Não Dominadas oferecem uma informação importante, mas sem ordenamento entre elas.
Para escolher, é necessário incorporar algum juízo de valor.
Segundo quando (e se) esse juízo é incluído:

Análise multicriterial

Critério de dominância é útil para comparar soluções **conhecidas**

É preciso gerar as soluções. Cómo não deixar de fora nenhuma das não domindas?

Por outro lado...

Soluções Não Dominadas oferecem uma informação importante, mas sem ordenamento entre elas.
Para escolher, é necessário incorporar algum juízo de valor.
Segundo quando (e se) esse juízo é incluído:

- a priori
- de forma progressiva
- a posteriori

Análise multicriterial

- Método de pesos
- Método de restrições
- 'Satisficing'
- Lexicografia
- Análise indiferencia
- Programação de metas
- Métodos interativos

Método de pesos

Baseado em definir importância relativa, ou 'peso' de cada objetivo.

Método de pesos

Baseado em definir importância relativa, ou 'peso' de cada objetivo.
As múltiplas funções objetivo ficam combinadas numa única

Método de pesos

Baseado em definir importância relativa, ou 'peso' de cada objetivo.
As múltiplas funções objetivo ficam combinadas numa única

$$min\, F(X) = f_1(X), f_2(x)..f_n(X)$$
$$min\, Z(X) = w_1 f_1(X) + w_2 f_2(x) + ... + w_n f_n(X)$$

Método de pesos

Baseado em definir importância relativa, ou 'peso' de cada objetivo. As múltiplas funções objetivo ficam combinadas numa única

$$min\, F(X) = f_1(X), f_2(x)..f_n(X)$$
$$min\, Z(X) = w_1 f_1(X) + w_2 f_2(x) + ... + w_n f_n(X)$$

A solução encontrada X^*:

Método de pesos

Baseado em definir importância relativa, ou 'peso' de cada objetivo. As múltiplas funções objetivo ficam combinadas numa única

$$min\, F(X) = f_1(X), f_2(x)..f_n(X)$$
$$min\, Z(X) = w_1 f_1(X) + w_2 f_2(x) + ... + w_n f_n(X)$$

A solução encontrada X^*:

- é a de maior compatibilização com os pesos

Método de pesos

Baseado em definir importância relativa, ou 'peso' de cada objetivo. As múltiplas funções objetivo ficam combinadas numa única

$$min\, F(X) = f_1(X), f_2(x)..f_n(X)$$
$$min\, Z(X) = w_1 f_1(X) + w_2 f_2(x) + ... + w_n f_n(X)$$

A solução encontrada X^*:

- é a de maior compatibilização com os pesos
- não necessariamente é 'ótima' segundo os objetivos

Método de pesos

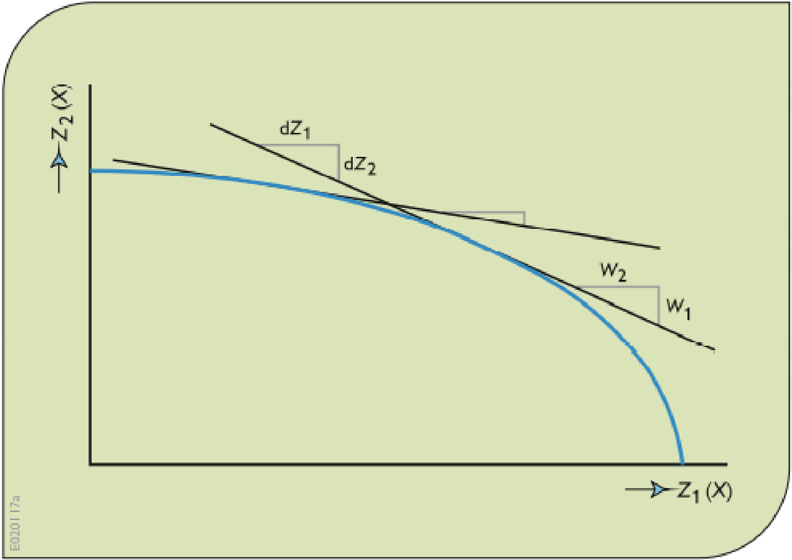
Baseado em definir importância relativa, ou 'peso' de cada objetivo.
As múltiplas funções objetivo ficam combinadas numa única

$$min\,F(X) = f_1(X), f_2(x)..f_n(X)$$
$$min\,Z(X) = w_1 f_1(X) + w_2 f_2(x) + ... + w_n f_n(X)$$

A solução encontrada X^*:

- é a de maior compatibilização com os pesos
- não necessariamente é 'ótima' segundo os objetivos
- Vector W representa preferências. Fixá-lo é um juízo de valor.

Método de pesos



Método de pesos

$$min\, F(X) = f_1(X), f_2(x)..f_n(X)$$
$$\rightarrow min\, Z(X) = w_1 f_1(X) + w_2 f_2(x) + ... + w_n f_n(X)$$

Método de pesos

$$
\begin{aligned}
min\, F(X) &= f_1(X), f_2(x)..f_n(X) \\
\rightarrow min\, Z(X) &= w_1 f_1(X) + w_2 f_2(x) + ... + w_n f_n(X)
\end{aligned}
$$

Método de busca de soluções eficientes:

Método de pesos

$$\min F(X) = f_1(X), f_2(x)..f_n(X)$$
$$\rightarrow \min Z(X) = w_1 f_1(X) + w_2 f_2(x) + ... + w_n f_n(X)$$

Método de busca de soluções eficientes:

- Definir um vetor pesos W

Método de pesos

$$min\, F(X) = f_1(X), f_2(x)..f_n(X)$$
$$\rightarrow min\, Z(X) = w_1 f_1(X) + w_2 f_2(x) + ... + w_n f_n(X)$$

Método de busca de soluções eficientes:

- Definir um vetor pesos W
- Encontrar uma solução "ótima" do caso

Método de pesos

$$
\begin{aligned}
min\, F(X) &= f_1(X), f_2(x)..f_n(X) \\
\rightarrow min\, Z(X) &= w_1 f_1(X) + w_2 f_2(x) + ... + w_n f_n(X)
\end{aligned}
$$

Método de busca de soluções eficientes:

- Definir um vetor pesos W
- Encontrar uma solução "ótima" do caso
- Alterar vetor W e repetir

Método de pesos

No espaço de objetivos:

$$\frac{dF_i}{dF_j}\Big|_{x=constante} = \frac{w_j}{w_i}$$

Método de pesos

No espaço de objetivos:

$$\frac{dF_i}{dF_j}\bigg|_{x=constante} = \frac{w_j}{w_i}$$

Importantes considerações numéricas.

Método de pesos

No espaço de objetivos:

$$\frac{dF_i}{dF_j}\Big|_{x=constante} = \frac{w_j}{w_i}$$

Importantes considerações numéricas.
Para avaliar:

Método de pesos

No espaço de objetivos:

$$\frac{dF_i}{dF_j}\Big|_{x=constante} = \frac{w_j}{w_i}$$

Importantes considerações numéricas.
Para avaliar:

- Problemas na padronização

Método de pesos

No espaço de objetivos:

$$\frac{dF_i}{dF_j}\Big|_{x=constante} = \frac{w_j}{w_i}$$

Importantes considerações numéricas.
Para avaliar:

- Problemas na padronização
- Difícil interpretação / sensibilidade dos pesos

Método de pesos

No espaço de objetivos:

$$\frac{dF_i}{dF_j}\Big|_{x=constante} = \frac{w_j}{w_i}$$

Importantes considerações numéricas.
Para avaliar:

- Problemas na padronização
- Difícil interpretação / sensibilidade dos pesos
- Relação com a frente pareto

Método de pesos

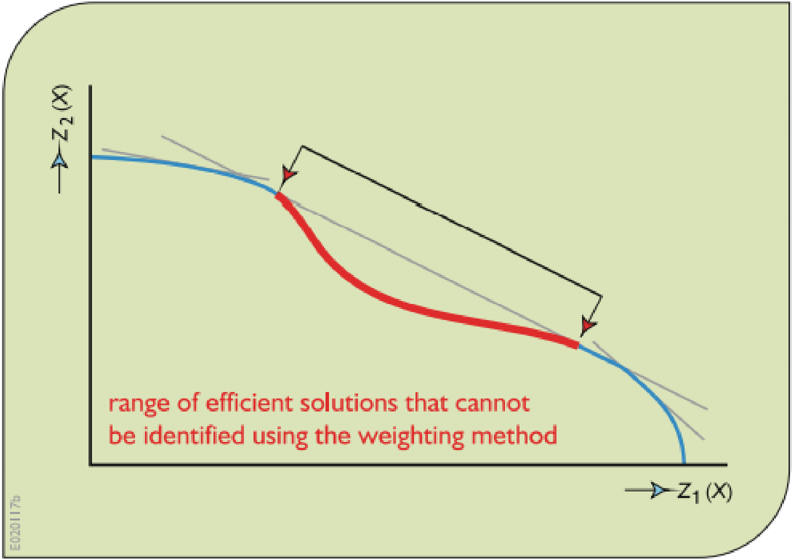
No espaço de objetivos:

$$\frac{dF_i}{dF_j}\Big|_{x=constante} = \frac{w_j}{w_i}$$

Importantes considerações numéricas.
Para avaliar:

- Problemas na padronização
- Difícil interpretação / sensibilidade dos pesos
- Relação com a frente pareto
- Problemas não côncavos (convexos)!

Método de pesos



Método das restrições

Um objetivo é otimizado, sujeito a valores limite nos outros objetivos.
A solução, relativa a qualquer conjunto de limites factíveis, é sol. eficiente

Método das restrições

Um objetivo é otimizado, sujeito a valores limite nos outros objetivos. A solução, relativa a qualquer conjunto de limites factíveis, é sol. eficiente

Repetindo para diferentes valores de limite, produz um conjunto de soluções eficientes

Método das restrições

Um objetivo é otimizado, sujeito a valores limite nos outros objetivos.
A solução, relativa a qualquer conjunto de limites factíveis, é sol. eficiente

Repetindo para diferentes valores de limite, produz um conjunto de soluções eficientes

Requer muito esforço computacional!

Métodos de geração de soluções eficientes

Métodos de geração de soluções eficientes ou não-dominadas

- Métodos entregam o conjunto, mas decisão depende dos tomadores de decisão

Métodos de geração de soluções eficientes

Métodos de geração de soluções eficientes ou não-dominadas

- Métodos entregam o conjunto, mas decisão depende dos tomadores de decisão
- Tanto método das restrições quanto pesos tem cômputo massivo, mas poderia ser muito reduzido se existissem valores pré-definidos. Difícil na prática!

Métodos de geração de soluções eficientes

Métodos de geração de soluções eficientes ou não-dominadas

- Métodos entregam o conjunto, mas decisão depende dos tomadores de decisão
- Tanto método das restrições quanto pesos tem cômputo massivo, mas poderia ser muito reduzido se existissem valores pré-definidos. Difícil na prática!
- Alternativa: métodos iterativos

Métodos de geração de soluções eficientes

Métodos de geração de soluções eficientes ou não-dominadas

- Métodos entregam o conjunto, mas decisão depende dos tomadores de decisão

Métodos de geração de soluções eficientes

Métodos de geração de soluções eficientes ou não-dominadas

- Métodos entregam o conjunto, mas decisão depende dos tomadores de decisão
- Tanto método das restrições quanto pesos tem cômputo massivo, mas poderia ser muito reduzido se existissem valores pré-definidos. Difícil na prática!

Métodos de geração de soluções eficientes

Métodos de geração de soluções eficientes ou não-dominadas

- Métodos entregam o conjunto, mas decisão depende dos tomadores de decisão
- Tanto método das restrições quanto pesos tem cômputo massivo, mas poderia ser muito reduzido se existissem valores pré-definidos. Difícil na prática!
- Alternativa: métodos iterativos