

# Metaheurísticas de otimização: Algoritmos genéticos. Problemas com variáveis não binárias.

Análise de sistemas

Maria M. Gamboa

2<sup>o</sup> Semestre de 2023. 09/11/2023

## **Lembrando da aula anterior**

- Formulação do problema

## **Lembrando da aula anterior**

- Formulação do problema
- Representação das variáveis (aula anterior, só binária)

## Lembrando da aula anterior

- Formulação do problema
- Representação das variáveis (aula anterior, só binária)
- População inicial

## Lembrando da aula anterior

- Formulação do problema
- Representação das variáveis (aula anterior, só binária)
- População inicial
- Seleção

## Lembrando da aula anterior

- Formulação do problema
- Representação das variáveis (aula anterior, só binária)
- População inicial
- Seleção
- Recombinação

## Lembrando da aula anterior

- Formulação do problema
- Representação das variáveis (aula anterior, só binária)
- População inicial
- Seleção
- Recombinação
- Mutação

## Lembrando da aula anterior

- Formulação do problema
- Representação das variáveis (aula anterior, só binária)
- População inicial
- Seleção
- Recombinação
- Mutação
- Nova geração e iteração



## **Lembrando da aula anterior**

- Formulação do problema
- Representação das variáveis (aula anterior, só binária)
- População inicial
- Seleção
- Recombinação
- Mutação
- Nova geração e iteração
- Convergência e parada

# Algoritmo genético não binário

Se as variáveis do problema não são binárias, mas podem ser discretas.

- Discretizar:  
se contínuo, intervalos fixos representados pelo valor médio  $p$   
pode ser categórico

# Algoritmo genético não binário

Se as variáveis do problema não são binárias, mas podem ser discretas.

- Discretizar:  
se contínuo, intervalos fixos representados pelo valor médio  $p$   
pode ser categórico
- Codificar/representar variável  $p$   
Representação binária com  $m$  bits, segundo número de valores possíveis de  $p$ .  
Sequencial

# Algoritmo genético não binário

Se as variáveis do problema não são binárias, mas podem ser discretas.

- Discretizar:  
se contínuo, intervalos fixos representados pelo valor médio  $p$   
pode ser categórico
- Codificar/representar variável  $p$   
Representação binária com  $m$  bits, segundo número de valores possíveis de  $p$ .  
Sequencial
- Cromossomo (solução, indivíduo) formado pela concatenação dessas representações.

# Algoritmo genético não binário

Se as variáveis do problema não são binárias, mas podem ser discretas.

- Discretizar:  
se contínuo, intervalos fixos representados pelo valor médio  $p$   
pode ser categórico
- Codificar/representar variável  $p$   
Representação binária com  $m$  bits, segundo número de valores possíveis de  $p$ .  
Sequencial
- Cromossomo (solução, indivíduo) formado pela concatenação dessas representações.
- Faz operações dos indivíduos com a representação binária.

# Algoritmo genético não binário

Se as variáveis do problema não são binárias, mas podem ser discretas.

- Discretizar:  
se contínuo, intervalos fixos representados pelo valor médio  $p$   
pode ser categórico
- Codificar/representar variável  $p$   
Representação binária com  $m$  bits, segundo número de valores possíveis de  $p$ .  
Sequencial
- Cromossomo (solução, indivíduo) formado pela concatenação dessas representações.
- Faz operações dos indivíduos com a representação binária.
- Para avaliação da F.O., precisa decodificar.

# Algoritmo genético não binário

Se as variáveis do problema não são binárias, mas podem ser discretas.

- Discretizar:  
se contínuo, intervalos fixos representados pelo valor médio  $p$   
pode ser categórico
- Codificar/representar variável  $p$   
Representação binária com  $m$  bits, segundo número de valores possíveis de  $p$ .  
Sequencial
- Cromossomo (solução, indivíduo) formado pela concatenação dessas representações.
- Faz operações dos indivíduos com a representação binária.
- Para avaliação da F.O., precisa decodificar.

Perda de significado dos cromossomos. Cuidado com os operadores a usar.

# Algoritmo genético contínuo

Se as variáveis de decisão devem ser reais, com precisão “alta”.

Representação com número real permite:

- Precisão (limitada pela máquina)
- Menor memória para armazenar variáveis
- Não precisa decodificar para cada avaliação da F.O.

A representação diferente traz mudanças no algoritmo, em particular nos operadores de recombinação e mutação.



# AG - Formulação e representação do problema

A partir da formulação do problema de otimização com N variáveis de decisão.

- Cromossomo / indivíduo / solução candidata:  
vetor de tamanho N, cada elemento um real (floating-point), com a precisão do sistema.

Padronização: Sempre que a faixa de valores das variáveis seja diferente (ou sempre, por precaução), deve-se padronizar

$$x_i = \frac{x' - x'_{min}}{x'_{max} - x'_{min}}$$

# AG - Formulação e representação do problema

A partir da formulação do problema de otimização com N variáveis de decisão.

- Cromossomo / indivíduo / solução candidata:  
vetor de tamanho N, cada elemento um real (floating-point), com a precisão do sistema.  
Padronização: Sempre que a faixa de valores das variáveis seja diferente (ou sempre, por precaução), deve-se padronizar

$$x_i = \frac{x' - x'_{min}}{x'_{max} - x'_{min}}$$

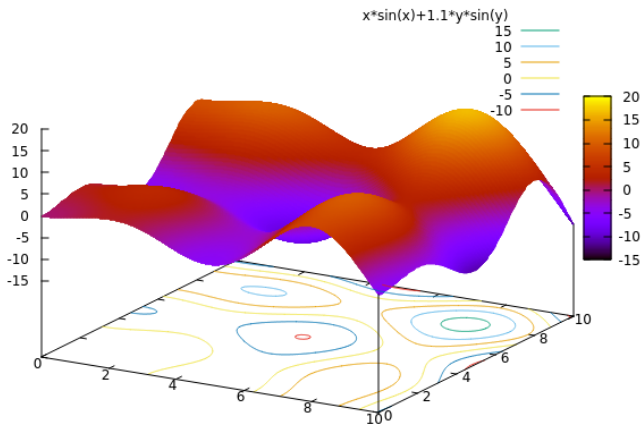
- Função de aptidão:  
Calculada direto com o cromossomo sem padronizar.

$$x' = (x'_{max} - x'_{min})x_i + x_{min}$$

# AG - Formulação e representação do problema

## Exemplo

$$\begin{aligned} \min. \quad & x \sin(4x) + 1.1 y \sin(2y) \\ \text{s. a: } & 0 \leq x \leq 10 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 10 \end{aligned}$$



Tamanho das populações definido  $Pop$

Geração aleatório de matriz tamanho  $Pop \times N$

Distribuição uniforme em  $[0, 1]$  se padronizado ou em  $[x_{min}, x_{max}]$  .

Calcula o valor de aptidão de todas as soluções da população.  
Para incorporar restrições: penalidade na função aptidão.

Calcula o valor de aptidão de todas as soluções da população.  
Para incorporar restrições: penalidade na função aptidão.  
Os mesmos operadores de seleção:

- Roleta
- Torneio

Calcula o valor de aptidão de todas as soluções da população.  
Para incorporar restrições: penalidade na função aptidão.  
Os mesmos operadores de seleção:

- Roleta
- Torneio

Elitismo. Em combinação com o operador (ou não)

# AG - Cruzamento

Com cada dois indivíduos (soluções) “pais” selecionados, devem ser produzidos dois novos indivíduos “filhos” para a próxima geração. Há diferentes métodos, deve ser escolhido segundo natureza do problema.

- Troca por um ou mais pontos  
Dividir cada um dos dois vetores “pais” de tamanho  $N$  usando uma posição (ou várias) aleatórios.  
Trocar as seções resultado dessa divisão.



# AG - Cruzamento

Com cada dois indivíduos (soluções) “pais” selecionados, devem ser produzidos dois novos indivíduos “filhos” para a próxima geração. Há diferentes métodos, deve ser escolhido segundo natureza do problema.

- Troca por um ou mais pontos  
Dividir cada um dos dois vetores “pais” de tamanho  $N$  usando uma posição (ou várias) aleatórios.  
Trocar as seções resultado dessa divisão.
- Cruzamento uniforme  
Para cada gene (variável), decidir aleatoriamente se deve ser trocado entre os “pais” ou não.  
Definir probabilidade de cruzamento.

# AG - Cruzamento

Com cada dois indivíduos (soluções) “pais” selecionados, devem ser produzidos dois novos indivíduos “filhos” para a próxima geração. Há diferentes métodos, deve ser escolhido segundo natureza do problema.

- Troca por um ou mais pontos  
Dividir cada um dos dois vetores “pais” de tamanho  $N$  usando uma posição (ou várias) aleatórios.  
Trocar as seções resultado dessa divisão.
- Cruzamento uniforme  
Para cada gene (variável), decidir aleatoriamente se deve ser trocado entre os “pais” ou não.  
Definir probabilidade de cruzamento.

Essas estratégias só usam os valores que já apareceram. Isso é correto para binário, mas não para variáveis reais.

Métodos de mistura:

Essas estratégias só usam os valores que já apareceram. Isso é correto para binário, mas não para variáveis reais.

Métodos de mistura:

- Cada variável (gene) da solução “filho” é combinação linear das variáveis nos “pais” .

$$x_{i,filho1} = \beta x_{i,pai1} + (1 - \beta)x_{i,pai2}$$

com  $\beta \in [0, 1]$

Essas estratégias só usam os valores que já apareceram. Isso é correto para binário, mas não para variáveis reais.

Métodos de mistura:

- Cada variável (gene) da solução “filho” é combinação linear das variáveis nos “pais” .

$$x_{i,filho1} = \beta x_{i,pai1} + (1 - \beta)x_{i,pai2}$$

com  $\beta \in [0, 1]$

- A segunda solução é construída da mesma forma, usando o complemento de  $\beta$

$$x_{i,filho2} = (1 - \beta)x_{i,pai1} + \beta x_{i,pai2}$$

Essas estratégias só usam os valores que já apareceram. Isso é correto para binário, mas não para variáveis reais.

Métodos de mistura:

- Essa mistura não é aplicada necessariamente em todos os genes (variáveis).

Aplicar a todos?

Aplicar à esquerda ou direita de um ponto de troca?

Decidir para cada um se aplicar ou não aleatoriamente.

Essas estratégias só usam os valores que já apareceram. Isso é correto para binário, mas não para variáveis reais.

Métodos de mistura:

- Essa mistura não é aplicada necessariamente em todos os genes (variáveis).  
Aplicar a todos?  
Aplicar à esquerda ou direita de um ponto de troca?  
Decidir para cada um se aplicar ou não aleatoriamente.
- Mistura pode usar  $\beta$  constante para todos os genes, ou mudar.

Essas estratégias só usam os valores que já apareceram. Isso é correto para binário, mas não para variáveis reais.

Métodos de mistura:

- Essa mistura não é aplicada necessariamente em todos os genes (variáveis).

Aplicar a todos?

Aplicar à esquerda ou direita de um ponto de troca?

Decidir para cada um se aplicar ou não aleatoriamente.

- Mistura pode usar  $\beta$  constante para todos os genes, ou mudar.

Serve para encontrar novos valores a partir da população existente, mas não valores fora da faixa que já apareceu.

# AG - Cruzamento

Para obter valores fora da região que já foi estudada:

Cruzamento linear

- Produz três “filhos” com cada dupla selecionada.

$$x_{i,filho1} = 0.5x_{i,pai1} + 0.5x_{i,pai2}$$

$$x_{i,filho2} = 1.5x_{i,pai1} - 0.5x_{i,pai2}$$

$$x_{i,filho3} = -0.5x_{i,pai1} + 1.5x_{i,pai2}$$

- Se algum dos três está fora do intervalo permitido, é eliminado,
- Dos que estão no intervalo, os dois com melhor função de aptidão são escolhidos para a seguinte geração.

Outra opção: Cruzamento heurístico

$$x_{i,filho1} = \beta(x_{i,pai1} - x_{i,pai2}) + x_{i,pai1}$$

Outros...



Se não feito apropriadamente, fica em mínimo local.

Método comum:

- Segundo a taxa de mutação definida, escolher aleatoriamente alguns genes da matriz da população total (não da elite).
- Cada gene escolhido é substituído por um valor aleatório de uma distribuição uniforme entre o mínimo e o máximo permitido à variável.

Se não feito apropriadamente, fica em mínimo local.

Método comum:

- Segundo a taxa de mutação definida, escolher aleatoriamente alguns genes da matriz da população total (não da elite).
- Cada gene escolhido é substituído por um valor aleatório de uma distribuição uniforme entre o mínimo e o máximo permitido à variável.

Outra estratégia: Somar um valor aleatório de uma distribuição normal

$$x_{i,filho1} = x_{i,pai1} + \sigma N(0, 1)$$

com  $N(0, 1)$  valor de uma distribuição normal, média 0, desvio padrão 1. Pode sair da faixa permitida à variável.

Nova geração tem mesma quantidade de indivíduos (soluções) da atual, incluindo:

- Melhores indivíduos da geração atual (se elitista)
- “Filhos” obtidos da recombinação a partir dos indivíduos selecionados, e após mutação.

Nova geração tem mesma quantidade de indivíduos (soluções) da atual, incluindo:

- Melhores indivíduos da geração atual (se elitista)
- “Filhos” obtidos da recombinação a partir dos indivíduos selecionados, e após mutação.

A recombinação é limitada ao número de indivíduos necessários, e são gerados mais indivíduos os de menos função de aptidão são eliminados.

Alternativas: como misturar a população nova com a original, e delas escolher a nova geração.

# AG - Convergência e parada

Cada geração pode ser avaliada segundo:

- melhor função aptidão obtida
- função aptidão média

Valores podem diminuir com alguma geração, mas a tendência é melhorar até estabilizar (se o problema têm solução e foi corretamente formulado, parâmetros úteis, etc).

Critérios de parada:

- Número máximo de iterações
- Variação mínima entre função aptidão de gerações sucessivas
- Tempo máximo de computo
- Variação mínima entre indivíduos da população

BoxCar 2D

Outros carros 2D

Exemplo para o trabalho prático:

Calibração de modelo matemático.

Obtenção do conjunto de parâmetros que minimizam a diferença entre a resposta simulada pelo modelo e o comportamento conhecido do sistema.