

MAT0225 - Funções Analíticas

Lista 3

2º Semestre de 2023

(1) Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo z real e é diferenciável para todo z real. Prove que $f'(z)$ é real para todo z real.

(2) Seja f uma função inteira da forma $f(x + iy) = u(x) + iv(y)$. Prove que f é um polinômio de grau no máximo 1.

(3) Calcule

$$\int_{\gamma} \frac{2 dz}{z^2 - 1},$$

onde γ é a circunferência de centro 1 e raio $1/2$ orientada positivamente.

(4) Calcule

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z dz}{(z + 1)^7},$$

onde γ é a circunferência de centro 0 e raio 5 orientada positivamente.

(5) Seja f uma função inteira tal que $|f(z)| \geq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Prove que f é constante.

(6) Seja $f = u + iv$ uma função inteira satisfazendo $u(x, y) \leq x$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que f é um polinômio de grau 1.

(7) Seja f inteira tal que $f(z) = f(z + 1) = f(z + i)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Prove que f é constante.

(8) Encontre o domínio de convergência das seguintes séries:

(a) $\sum_{n \geq 0} n(z - 1)^n$

(b) $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} (z + 1)^n$

(c) $\sum_{n \geq 0} n^2 (2z - 1)^n$.