PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 8 DE NOVEMBRO

LISTA 5

1) Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Mostre que:

a) Todo subconjunto LI de V com n vetores é uma base de V.

b) Todo subconjunto gerador de V com n vetores é uma base de V.

RESOLUÇÃO.

a) Vamos demonstrar essa afirmação de duas formas diferentes.

PRIMEIRA FORMA.

Seja L um subconjunto LI de V. Como L é LI, podemos fixar uma base B de V de modo que $L \subseteq B$. Feito isso, notemos que, como B é base de V, e como $\dim(V) = n$, B possui n vetores. Logo, L é um subconjunto de B com o mesmo número de elementos de B, e, portanto, $L = B$ — o que, por sua vez, permite-nos concluir que L é uma base de V.

SEGUNDA FORMA.

Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ um subconjunto LI de V com n vetores. Vamos mostrar que $[v_1, \dots, v_n] = V$. Para isso, fixemos, inicialmente, $v \in V \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$ de modo arbitrário. Como, por hipótese, $v \notin \{v_1, \dots, v_n\}$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ é um subconjunto de V com $n+1$ elementos e, portanto, é LD (já que $\dim(V) = n$). Logo, podemos fixar escalares não todos nulos $a_1, \dots, a_n$ e a de modo que

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + av = 0_V.$$

Feito isso, notemos que a deve ser necessariamente não nulo. Isso porque, se $a = 0$, então $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0_V$, e, como $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI, disso resultaria que $a_1 = \dots = a_n = 0$ — o que, por sua vez, seria um absurdo, pois, por hipótese, $a_1, \dots, a_n$ e a não são todos nulos. Sendo assim, decorre do fato de que $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + av = 0_V$ que v é igual a

$$\left(-\frac{a_1}{a}\right) v_1 + \dots + \left(-\frac{a_n}{a}\right) v_n$$

e, portanto, pertence a $[v_1, \dots, v_n]$ — a partir do que concluímos, em vista da arbitrariedade de v em $V \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$, que $V \setminus \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq [v_1, \dots, v_n]$. E, como $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq [v_1, \dots, v_n] \subseteq V$, disso resulta, por fim, que, de fato, $[v_1, \dots, v_n] = V$. Logo, $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V.

b) Seja G um conjunto gerador de V com n vetores. Como G gera V, podemos fixar uma base B de V de modo que $B \subseteq G$. Feito isso, notemos que, como B é base de V, e como $\dim(V) = n$, B possui n vetores. Logo, B é um subconjunto de G com o mesmo número de elementos que G, e, portanto, $B = G$ — o que, por sua vez, mostra-nos que G é uma base de V.