Aula 12

Operadores diagonalizáveis

Seja $T: U \mapsto U$ um operador linear definido em um espaço vetorial U sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita n.

Recordamos que muitas informações sobre a transformação T pode ser obtida via a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$. Logo, é conveniente que $[T]_{\mathcal{B}}$ seja a mais simples possível. Por exemplo, se $[T]_{\mathcal{B}}$ for uma matriz diagonal a identificação de seu núcleo e imagem é imediata.

Nesta aula vamos nos concentrar em identificar quais operadores $T: U \mapsto U$ estão associados a matrizes diagonais, ie., $\exists\, \mathcal{B}$ base de U tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz diagonal.

Recordamos que $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ é diagonal se $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$.

Definições: Seja $T: U \mapsto U$ um operador linear.

(a) $\lambda \in \mathbb{K}$ é autovalor de T se $\exists u \in U$ tal que $T(u) = \lambda u$. u é chamado de autovetor de T associado ao autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$.

(b) Suponha $\dim U = n < +\infty$. Então dizemos que T é diagonalizável se $\exists \mathcal{B}$ base de U tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz diagonal.

OBS:

(i) $T: U \mapsto U$ linear é diagonalizável se somente se existe $\mathcal{B}$ base de U formada por autovetores de T.

(ii) T não é um isomorfismo se só se $0 \in \mathbb{K}$ é autovalor de T.

(iii) Nem todo operador linear possui autovalor. Por exemplo, $T: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2 : (x,y) = (-y,x)$ ($\mathbb{R}^2$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$).

(iv) $\lambda \in \mathbb{K}$ é autovalor de T se somente se existe $u \in U/\{0\}$ tal que $T(u) = \lambda u \Leftrightarrow (T - \lambda I)u = 0$ onde $I : U \mapsto U$ é a identidade. Assim, $\lambda \in \mathbb{K}$ é autovalor de T se só se $\exists\, u \in U/\{0\}$ tal que $u \in Nuc(T - \lambda I)$. Isto é, se somente se $Nuc(T - \lambda I) \neq \{0\}$.

(v) Denotamos por $Aut(\lambda) = \{u \in U : T(u) = \lambda u\}$.
Qdo λ é autovalor de T temos que $Aut(\lambda)$ é subespaço.

Além disso temos que $Aut(\lambda) = Nuc(T - \lambda I)$.

(vi) Seja B uma base qualquer de U. Então

$$Nuc(T - \lambda I) \neq \{0\} \Leftrightarrow [T - \lambda I]_B \text{ não é invertível}$$

$$\Leftrightarrow \det [T - \lambda I]_B = 0.$$

Desta forma $\lambda \in K$ é autovalor de T se somente se $\det [T - \lambda I]_B = 0$, para qq. base B de U.

Veja que $p(\lambda) = \det[T-\lambda I]_{\mathcal{B}}$ é um polinômio de grau n dimensão de U. Além disso, $p(\lambda)$ independe da base $\mathcal{B}$.

Com efeito, seja $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de U. Então

$$p(\lambda) = \det[T-\lambda I]_{\mathcal{B}} = \det P^{-1}[T-\lambda I]_{\mathcal{B}'}P \quad \text{onde}$$

P é a matriz mudança de $\mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}$. Logo

$$p(\lambda) = \det[T-\lambda I]_{\mathcal{B}} = \det P^{-1} \det[T-\lambda I]_{\mathcal{B}'} \det P$$

$$= \det[T-\lambda I]_{\mathcal{B}'} \quad \text{já que } \det P^{-1} \cdot \det P = 1.$$

Def. $p(\lambda) = \det[T-\lambda I]_{\mathcal{B}}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, é chamado de polinômio característico de T.

OBS: Seja U espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $T \in L(U,U)$ um operador. Como $\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado, então o polinômio característico de T tem a forma

$$p_T(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_p)^{r_p} \quad \text{para alguns } \lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{C}$$

$r_1,\dots,r_p \in \mathbb{N}$. Logo T possuirá autovalores.

Exemplos:

1) $T: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$p(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 + 1 \geq 1 \text{ se } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) $T: \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2$ com $T(z,w) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm i.$$

Para cada $\lambda = \pm i$ podemos encontrar seu autovetores.

- $\lambda = i$ $\quad \mathrm{Aut}(i) = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \left\{ (z,w) : \begin{cases} -iz - w = 0 \\ z - iw = 0 \end{cases} \right\}$

$$= \{ (z, -iz) : z \in \mathbb{C} \} = [(1,-i)].$$

- $\lambda = -i$ $\quad \mathrm{Aut}(-i) = \left\{ (z,w) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} iz - w = 0 \\ z + iw = 0 \end{cases} \right\}$

$$= \{ (z, iz) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C} \} = [(1,i)].$$

3) Seja $T: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ tal que para alguma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ temos $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}(1-\lambda)$$

$$= (\lambda^2-\lambda+1)(1-\lambda) = \left(\lambda-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\right)(1-\lambda).$$

Exercícios: Seção 5.1.14: 1, 2, 3, 4.