Integração como função do limite superior

Semana de 06/11/23

Integração como função do limite superior

Suponha que f seja uma função que é integrável num grande intervalo, com o qual nós vamos nos preocupar muito: tudo o que for dito supõe que as integrações que fazemos são válidas.

Podemos então definir uma função por

$$A(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

isto é, a função $A(x)$ é o valor da integral de f no intervalo $[a,x]$ (ou menos a integral de f no intervalo $[x,a]$, caso $x < a$).

$A(x)$ é chamada uma integral indefinida de f. O artigo usado ("uma") é indefinido pois $A(x)$ também depende do limite inferior e, se tomamos outro ponto c e definimos

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

então F também é uma integral indefinida de f.

Note que se A e F são integrais indefinidas, então a diferença entre elas é constante:

$$A(x) - F(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$$

Um número, que não depende de x.

Se conhecemos alguma integral indefinida de uma função f, calcular a integral de f sobre um intervalo é fácil: basta fazer a diferença. Por exemplo

$$\int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} = F(x)$$

isto é, $x^{n+1}/_{n+1}$ é integral indefinida de x^n

Portanto

$$\int_a^b t^n\,dt = \int_0^b t^n\,dt - \int_0^a t^n\,dt = F(b) - F(a) = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Em geral, se $F(x)$ é integral indefinida de f,

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_c^b f(t)\,dt - \int_c^a f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Essa fórmula vale para qualquer integral indefinida, já que, como vimos, se $A(x)$ é outra integral indefinida da mesma função f, então existe uma constante k tal que $A(x) = F(x) + k$ e, portanto

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = \big(A(b) + k\big) - \big(A(a) + k\big) = A(b) - A(a).$$

Escrevemos,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = A(x)\Big|_a^b$$

e isso vale para quaisquer integrais indefinidas de f.

Por outro lado, se $A(x)$ é uma integral indefinida de f

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

e se $k = \int_c^a f(t)\,dt$, então $F(x) = A(x) + k$ também é integral indefinida de f:

$$F(x) = A(x) + k = \int_a^x f(t)\,dt + \int_c^a f(t)\,dt = \int_c^x f(t)\,dt.$$

O que vimos quando discutimos senos e cossenos implica que

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \\ -\cos x \end{cases} \text{ é integral indefinida de } \begin{cases} \cos x \\ \operatorname{sen} x \end{cases}.$$

Embora tenhamos adiado para mais tarde a prova dessa igualdades, vimos que

$$\int_0^x \cos t\,dt = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \int_0^x \operatorname{sen} t\,dt = 1 - \cos x$$

Isso quer dizer que $\operatorname{sen} x$ é uma integral indefinida de $\cos x$. A segunda igualdade mostra que $1-\cos x$ é integral indefinida de $\operatorname{sen} x$. Para podermos concluir que $-\cos x$ também é integral indefinida de $\operatorname{sen} x$, usando o raciocínio da página anterior, precisaríamos encontrar um intervalo $[c, 0]$ tal que

$$-\cos x = \int_c^x \operatorname{sen} t\,dt = \int_c^0 \operatorname{sen} t\,dt + \int_0^x \operatorname{sen} t\,dt =$$

$$\int_a^b = -\int_b^a$$

$$= -\int_0^c \operatorname{sen} t \, dt + \int_0^x \operatorname{sen} t \, dt = -(1-\cos c) + (1-\cos x)$$

Isto é, queremos encontrar c tal que

$$-\cos x = \cos c - \cos x \iff \cos c = 0$$

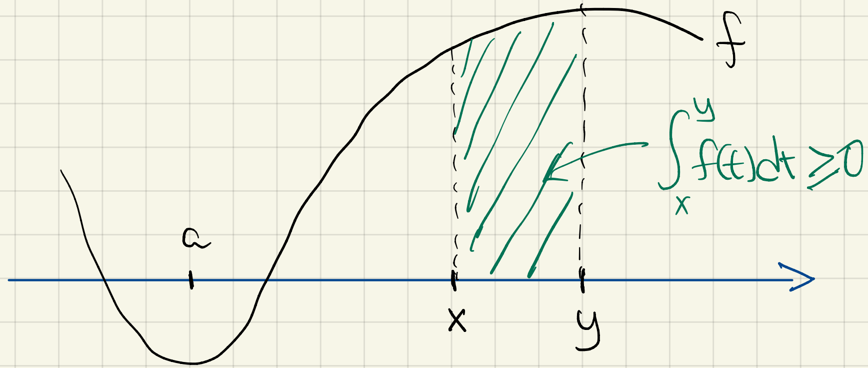
Tomando, por exemplo $c = -\pi/2$, temos que

$$\int_{-\pi/2}^x \operatorname{sen} t \, dt = -\cos x$$

Algumas consequências: Vejamos algumas coisas que podem ser concluídas da relação entre funções e integrais indefinidas. A primeira delas é simples: em intervalos onde $f(x)$ é positiva suas integrais indefinidas são crescentes e, vice versa, se $f(x)$ é negativa em um intervalo, suas integrais indefinidas são decrescentes no intervalo.

Isso é consequência simples da aditividade da integral em relação ao intervalo de integração:

Suponha que $x < y$ e que $f(t)$ seja ≥ 0 no intervalo $[x,y]$. Assim se



$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$F(y) = \int_a^y f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^y f(t)\,dt$$

e como $\int_x^y f(t)dt \geq 0$ (*), segue que $F(y) \geq F(x)$.

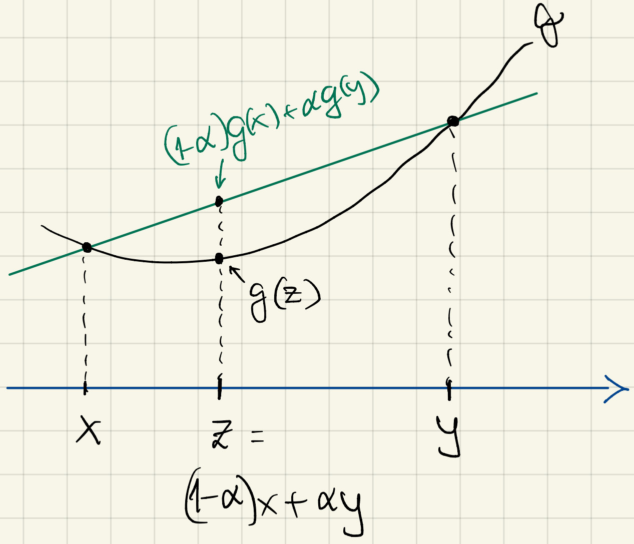
Analogamente, mostra-se que se $f(t) \leq 0$ em $[x,y]$, então $F(y) \leq F(x)$, isto é, F é monótona decrescente em qualquer intervalo onde f é ≤ 0.

(*) Há aqui uma sutileza: não é óbvio que $f(t) > 0$ em $[a,b]$ implica que $\int_a^b f(t)dt > 0$. É fácil ver que $\int_a^b f(t)dt \geq 0$, mas a desigualdade estrita é (bastante) mais sutil. Assim, o que provamos de fato é que

$$\boxed{f(t) \begin{cases} \geq 0 & \text{em } [\alpha,\beta] \\ \leq 0 & \text{em } [\alpha,\beta] \end{cases} \implies \begin{cases} F(x) \leq F(y) \\ F(x) \geq F(y) \end{cases} \quad \forall\, x<y \text{ em } [\alpha,\beta].}$$

Convexidade: Uma função $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ é CONVEXA se para todo $0<\alpha<1$, vale a desigualdade

$$\boxed{g((1-\alpha)x+\alpha y) \leq (1-\alpha)g(x)+\alpha g(y)}$$



Se trocamos sinal de desigualdade acima, chamamos a funçõ g de côncava.

Na página anterior, mostramos que em intervalos onde f é positiva suas primitivas são crescentes. Vamos mostrar agora que em intervalos onde f é crescente, suas primitivas são convexas. Analogamente, em intervalos onde f é decrescente, suas primitivas são côncavas.

Teorema: Seja $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Então F é convexa em todo intervalo no qual f é crescente e F é côncava em todo intervalo onde f é decrescente.

Prova: Suponha que f seja crescente em $[a,b]$ e que $a\leq x<y\leq b$. Se $0<\alpha<1$, então $z=(1-\alpha)x+\alpha y = x+\alpha(y-x)$ é tal que $x<z<y$.

Note que $(1-\alpha)z+\alpha z = z = (1-\alpha)x+\alpha y \iff (1-\alpha)(z-x)=\alpha(y-z)$.

Queremos mostrar que $F(z) \leq (1-\alpha)F(x) + \alpha F(y)$ que é o mesmo que

$$(1-\alpha)F(z) + \alpha F(z) \leq (1-\alpha)F(x) + \alpha F(y) \iff$$

$$(1-\alpha)\left[F(z) - F(x)\right] \leq \alpha\left[F(y) - F(z)\right]$$

e, lembrando da definição de F, isso é o mesmo que

$$(*) \qquad (1-\alpha)\int_x^z f(t)\,dt \leq \alpha \int_z^y f(t)\,dt$$

Isto é, se provamos $(*)$ teremos provado o teorema (ou metade dele; a outra afirmação é análoga).

Da hipótese que f é crescente no intervalo e do fato $x < z < y$, segue que $f(x) \leq f(z) \leq f(y)$. Assim

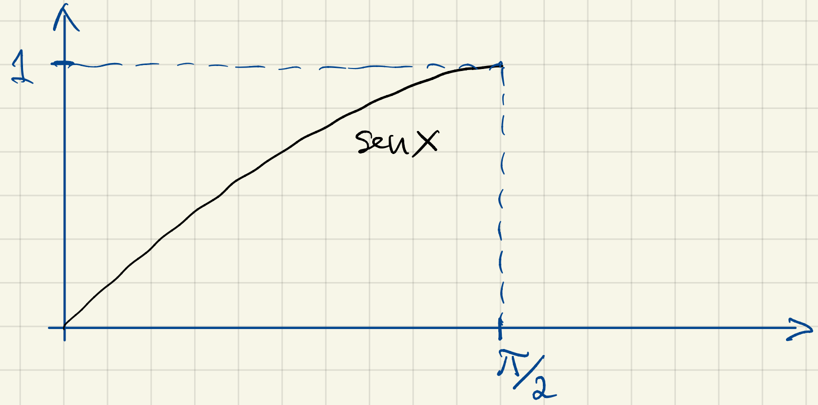
$$(1-\alpha)\int_x^z f(t)\,dt \leq (1-\alpha)\int_x^z f(z)\,dt = (1-\alpha)f(z)(z-x)$$

$$\alpha \int_z^y f(t)\,dt \geq \alpha \int_z^y f(z)\,dt = \alpha f(z)(y-z)$$

Pela igualdade na página anterior

Da igualdade $(1-\alpha)(z-x) = \alpha(y-z)$, segue $(*)$ que é o que queríamos. $\square$

Exemplo: Vimos que coseno é decrescente no intervalo $[0, \pi/2]$. Do teorema anterior segue então que



$$\operatorname{sen} x = \int_0^x \cos t \, dt$$

é côncava no intervalo $[0, \pi/2]$.

Exercício: O que se pode concluir sobre a função $\cos x$ usando um raciocínio análogo?

Exercícios seção 2.19, p. 124: 1, 2, 3, 6, 7, 9, 11, 15, 17, 18.