INTEGRAIS DE LINHA

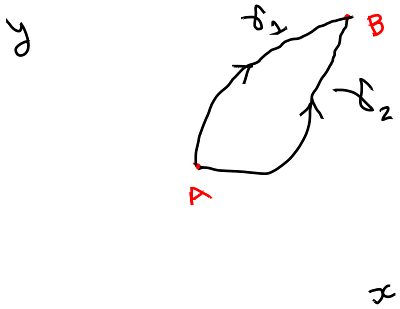
1. Integral de linha de campos escalares

2. Campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

3. Integral de linha de campos vetoriais

4. Campos conservativos

Em geral, o trabalho realizado por uma força $\vec{F}(x, y, z)$ ao mover uma partícula ao longo de dois caminhos γ_1 e γ_2, com mesmo ponto inicial A e mesmo ponto final B é diferente. Ou seja, a integral de linha depende não apenas dos pontos A e B, mas também do trajeto que os liga. Dizemos que a integral de linha, em geral **depende do caminho**.



Em geral, $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{dr} \neq \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{dr}$.

Entretanto, existe uma classe especial de campos, denominados **conservativos** para os quais vale a igualdade.

Definição 4.1. *Um campo $\vec{F}(x, y, z)$ é **conservativo** em um domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ se, para quaisquer dois pontos A e B em D, a integral de linha de $\vec{F}(x, y, z)$ é a mesma ao longo de qualquer curva lisa por*

Date: November 9, 2023.

partes com traço contido em D, com ponto inicial A e ponto final B.

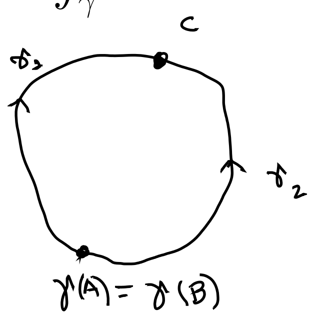
Suponhamos agora que γ é uma curva fechada simples e lisa por partes com traço contido em D. Nesse caso é usual denotar a integral do campo $\vec{F}$ sobre γ por

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr}.$$

Não é difícil ver que, se $\vec{F}$ é campo conservativo em D então $\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0$ e também a recíproca. Ou seja, temos a seguinte caracterização alternativa de campos conservativos.

Proposição 4.2. *Um campo $\vec{F}(x, y, z)$ é* ***conservativo*** *em um domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ se e somente se , para qualquer curva fechada simples e lisa por partes com traço contido em D vale que*

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0.$$



$$\int_{\gamma_1} \vec{F}\, \vec{dr} = \int_{\gamma_2} \vec{F}\, dr = -\int_{-\gamma_2} \vec{F}\, d\vec{r}$$

Exemplo 4.3.

(1) *O campo $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + xy\vec{j}$ não é conservativo no plano.*
(2) *O campo $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + x\vec{j}$ é conservativo no plano.*

Observe que, no segundo exemplo, temos $\vec{F}(x, y) = \vec{\nabla}\varphi$, sendo $\varphi = xy$. Dizemos que um campo é **campo gradiente** quando isto ocorre. Mais precisamente

Definição 4.4. *Seja $\vec{F}(x,y,z)$ um campo contínuo em um domínio D. Dizemos que $\vec{F}(x,y,z)$ é* ***campo gradiente*** *em D se existe um campo escalar $\varphi(x,y,z)$ de classe $\mathcal{C}^1$ em D tal que $\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla}\varphi(x,y,z)$ em D. O campo escalar $\varphi(x,y,z)$ é um* ***potencial*** *de $\vec{F}(x,y,z)$ em D*

Observemos que, se $\varphi(x,y,z)$ é um **potencial** de $\vec{F}(x,y,z)$ em D então $\varphi(x,y,z)+k$, k constante real, também o é.

Proposição 4.5. *Seja $\vec{F}(x,y,z)$ um campo gradiente no domínio D e $\varphi(x,y,z)$ um* ***potencial*** *de $\vec{F}(x,y,z)$ em D. Se γ é curva lisa por partes com traço em D com ponto inicial $A=\gamma(a)$ e ponto final $B=\gamma(b)$, então*

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{dr} = \varphi(B)-\varphi(A)$$

.

Dem.

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{dr} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t))\cdot\vec{\gamma'(t)}\,d\,t\\ &= \int_a^b \vec{\nabla}\varphi(\gamma(t))\cdot\vec{\gamma'(t)}\,d\,t\\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\varphi(\gamma(t))\right)\,d\,t\\ &= \varphi(B)-\varphi(A).\end{aligned}$$

□

Como consequência imediata, temos:

Corolário 4.6. *Se $\vec{F}(x, y, z)$ é um campo gradiente no domínio D, então $\vec{F}(x, y, z)$ é conservativo em D.*

Exemplo 4.7. *Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo $f(x, y = \frac{x}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\vec{j}$ e $\gamma(t) = (\ sen^2(t) + 1, \cos(2t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.*

A recíproca do Corolário 4.6 também e verdadeira.

Proposição 4.8. *Se $\vec{F}(x, y, z)$ é um campo conservativo no domínio D, então $\vec{F}(x, y, z)$ é campo gradiente em D.*

Das proposições 4.6 e 4.8 temos a equivalência

$$\vec{F}(x, y, z) \text{ é gradiente no domínio } D \Leftrightarrow \vec{F}(x, y, z) \text{ é conservativo } D.$$

O**u seja, uma condição necessária e suficiente** para que $\vec{F}(x, y, z)$ seja conservativo em D é que ele seja gradiente em D.

Uma condição mais simples de verificar mas que é apenas **necessária** é a seguinte;

Proposição 4.9. *Se o campo $\vec{F}(x, y, z)$ de classe $\mathcal{C}^1$ é conservativo em D então $ro\vec{t}F = 0$ em D.*

Dem. Basta observar que $ro\vec{t}F = ro\vec{t}\nabla\varphi$ $= 0$, sendo φ um potencial de $\vec{F}$ em D. □

Se o campo $\vec{F}(x, y, z)$ tem rotacional nulo em D, diz-se que ele é **irrotacional** em D.

Exemplo 4.10.

(1) *O campo $\vec{F}(x, y, z)x^2y\vec{i} + yz\vec{j} - z^3\vec{k}$ não é conservativo em $\mathbb{R}^3$ pois $ro\vec{t}F \neq 0$ em R^3*

(2) *O campo $\vec{F}(x, y) = 2x\ sen\, y\vec{i} + x^2\cos y - 3y^2\vec{j}$ é irrotacional em $\mathbb{R}$. Isso não permite garantir que $\vec{F}$ é conservativo em*

$\mathbb{R}^2$. *Entretanto é fácil ver que* $\varphi(x,y) = x^2 sen y - y^3$ *é um potencial para* $\vec{F}$ *em* $\mathbb{R}^2$. *Segue que* $\vec{F}$ *é campo gradiente em* $\mathbb{R}^2$, *portanto conservativo.*

(3) *O campo* $\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$ *é irrotacional em* $D = \mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Entretanto, se C *é uma circunferência de centro na origem, temos* $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \pm 2\pi$. *Portanto* $\vec{F}(x,y)$ *não é conservativo em* D.