INTEGRAIS DE LINHA

1. Integral de linha de campos escalares

2. Campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

3. Integral de linha de campos vetoriais

Considere uma partícula que se move no espaço ao longo da curva lisa $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t), \; t \in [a, b]$, sob a ação de um campo de forças $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$.

O trabalho τ realizado realizado pelo campo de forças $\vec{F}$ é dado pela integral de linha da componente tangencial F_T do campo, na direção e sentido do movimento,

$$\tau = \int_\gamma \langle \vec{F}, \vec{r} \rangle \, d\, s,$$

sendo $r(\vec{t}) = \frac{\gamma'(\vec{t})}{||\gamma'(\vec{t})||}$ o versor do vetor tangente à curva. Temos então

$$\begin{aligned} \tau &= \int_\gamma \langle \vec{F}, \vec{r} \rangle \, d\, s \\ &= \int_a^b \langle F(\vec{\gamma}(t), r(\vec{\gamma(t)})) \rangle \, ||\gamma'(\vec{t})|| \, d\, t \\ &= \int_a^b \langle F(\vec{\gamma}(t), \gamma'(\vec{t}) \rangle \; d\, t. \end{aligned}$$

Em geral, definimos a integral de linha de um campo vetorial como segue

Date: November 9, 2023.

Definição 3.1. *Seja $\vec{F}(x,y,z)$ um campo contínuo em um domínio contendo o traço d de uma curva lisa $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$. A integral de linha de F ao longo de γ é definida por*

$$\int_\gamma \vec{F}\,\vec{dr} = \int_a^b \langle F(\vec{\gamma}(t)), \vec{\gamma'(t)}\rangle \; d\,t.$$

(Se γ é lisa por partes definimos a integral como a soma das integrais nos subintervalos que particionam $[a,b]$ nos quais ela é lisa).

Exemplo 3.2. *Calcular a integral de linha do campo $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, ao longo da curva dada por*

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \ sen\,t \\ z(t) = t, \quad t \in [0,3]. \end{cases}$$

3.1. **Outra notação para a integral de linha de campos.** Suponhamos que $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)$, $t \in [a,b]$ e $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. A integral de linha de F ao longo de γ é dada por

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\,\vec{dr} &= \int_a^b \langle F(\vec{\gamma}(t)), \vec{\gamma'(t)}\rangle \\ &= \int_a^b [P(\gamma(t)) \cdot x'(t) + Q(\gamma(t)) \cdot y'(t) + R(\gamma(t)) \cdot z'(t)]\; d\,t\end{aligned}$$

Essa expressão sugere escrever simbolicamente $\vec{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ e, interpretando o produto $\vec{F} \cdot \vec{dr}$ como produto escalar, usar a notação

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \,\vec{dr} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + Q\,dz.$$

para a integral de linha de F ao longo de γ (que ajuda a lembrar a expressão que aparece no último integrando).

Exemplo 3.3. *Usando esta notação, o exemplo acima pode ser escrito da seguinte forma. Calcular a integral de linha* $\int_\gamma x\,dx + y\,dy + z\,dz$, *ao longo da curva dada por* $\gamma(t) = (\cos t,\ sen\,t, t)$, $t \in [0,3]$.

A integral de linha $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr}$ é invariante por reparametrização da curva γ desde que a **orientação**, ou seja, o sentido de percurso seja mantido. Se este sentido for invertido a integral troca de sinal. Mais precisamente, temos

Proposição 3.4. *Se* $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *e* $gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ *diferem por reparametrização e* $\vec{F}$ *é um campo contínuo sobre o traço de de* γ_1 *então* $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \pm \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{dr}$. *O sinal se mantém se a orientação definida pelas duas parametrizações é a mesma e se inverte se elas são opostas.*

Em vista desse resultado, está bem definida a integral de linha sobre uma curva dados apenas seu traço e orientação.

Exemplo 3.5. *Calcule* $\int_C x\,dx + (y+x)\,dy + z\,dz$, *sendo* C *a interseção das superfícies* $z = x^2 + y^2$ *e* $z = 2x + 2y - 1$, *orientada de modo que sua projeção no plano* Oxy *seja percorrida uma vez no sentido horário.*