EXERCÍCIOS DE SOMAS DIRETAS DAS LISTAS 4 e 5

Exercício 16 da Lista 5 (Fórmula Importante)

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e sejam U e W subespaços de V.

Provar que

$$\boxed{\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W}$$

Dem:

Seja $B_{U\cap W} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ uma base de $U \cap W$.

$U \cap W \subset U$

Estenda $B_{U\cap W}$ a uma base de U (Teo do Complemento)

$B_U = \{v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_r\} \subset U$ $(\dim U = r)$

Estenda $B_{U\cap W}$ a uma base de W

$B_W = \{v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_s\} \subset W$ $(\dim W = s)$

Vamos mostrar que

$B = \{v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_r, w_{k+1}, \ldots, w_s\}$

é uma base de $U+W$.

(1) $[B] = U + W$

Seja $v \in U + W$. Então $\exists\, u \in U$ e $w \in W$

tais que $v = u + w$,

Existem escalares $a_1, \ldots, a_r$ tais que

$u = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \cdots + a_r v_r$.

Existem escalares $b_1, \ldots, b_s$ tais que

$w = b_1 v_1 + \cdots + b_k v_k + b_{k+1} w_{k+1} + \cdots + b_s w_s$

Logo $v = u + w =$

$(a_1+b_1)v_1 + \dots + (a_k+b_k)v_k + a_{k+1}u_1 + \dots + a_r u_r + b_{k+1}w_{k+1} + \dots + b_s w_s$.

Assim $v \in [B]$.

(2) B é LI

(*) Suponha que

$$0 = \underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} u_{k+1} + \dots + a_r u_r}_{u} + \underbrace{b_1 w_{k+1} + \dots + b_s w_s}_{\in W}$$

Então

$$u = \underbrace{(-b_1)w_{k+1} + \dots + (-b_s)w_s}$$

$u \in U$, $(-b_1)w_{k+1} + \dots + (-b_s)w_s \in W$

Como u é igual a um vetor de W, temos que $u \in U \cap W$.

Logo $u = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} u_{k+1} \dots + a_r u_r$

$= c_1 v_1 + \dots + c_k v_k + 0 \cdot u_{k+1} + \dots + 0\, u_r$

(u é CL só da base de $U \cap W$).

Assim, $a_i = c_i \quad \forall\, i = 1, \dots, k$ e $a_{k+1} = \dots = a_r = 0$

Então, (*) fica:

$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 w_{k+1} + \dots + b_s w_s = 0$

Como $\{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_s\}$ é base de W

temos que $a_1 = \dots = a_k = b_{k+1} \dots b_s = 0$.

No conjunto $B = \{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_r, w_{k+1}, \dots, w_s\}$ temos

$r + s - k$ vetores. Logo, vale a fórmula!

(17) IMPORTANTE

As afirmações a seguir são equivalentes:

(a) $V = U \oplus W$

(b) Se B é uma base de U e C é uma base de W então $B \cup C$ é uma base de V.

(c) $V = U + W$ e $\dim V = \dim U + \dim W$.

Dem:

(a) $\Rightarrow$ (b)

Suponha que $V = U \oplus W$. Então: $U \cap W = \{0\}$ (**)

e $\boxed{V = U + W}$ (*)

Mostrar que $[B \cup C] = V$ e que $B \cup C$ é LI.

$B = \{u_1, ---, u_r\}$, $C = \{w_1, ---, w_s\}$

Como $v = u + w$, (por (*)) $u \in U$ e $w \in W$,

$v = a_1 u_1 + --- + a_r u_r + b_1 w_1 + --- + b_s w_s$.

Logo, para todo $v \in V$.

Logo $[B \cup C] = V$.

Mostrar que $B \cup C$ é LI.

Se existe $v \in B \cap C$, então $[v] \subset U \cap W$ esse $v \neq 0$ pois é vetor de base

$\Rightarrow U \cap W \neq \{0\}$, contra a hipótese.

Logo $B \cap C = \emptyset$

$B \cup C = \{\underbrace{u_1, ---, u_r}_{\text{base de } U}, \underbrace{w_1, ---, w_s}_{\text{base de } W}\}$

$B \cup C$ é LI, pois se

$$a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r + b_1 w_1 + \cdots + b_s w_s = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r}_{\in U} = -(\underbrace{b_1 w_1 + \cdots + b_s w_s}_{\in W}) \in U \cap W \overset{\shortparallel}{\{0\}}$$

Como $U \cap W = \{0\}$ e $\{u_1, \ldots, u_r\}$ é LI

$$\Rightarrow a_1 = \cdots = a_r = 0.$$

Agora $\{w_1, \ldots, w_s\}$ LI $\Rightarrow b_1 = \cdots = b_s = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a)

Se B é uma base de U e $B \cup C$ é base de $U + W$,
C é uma base de W

então, se $v \in V$, $v = \underbrace{a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r}_{= u \in U} + \underbrace{b_1 w_1 + \cdots + b_s w_s}_{w \in W}$

Logo $V = U + W$.

Como $\{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s\}$ é LI,

temos que $U \cap W = \{0\}$. ∎

(a) $\Leftrightarrow$ (b)
$\Updownarrow$
(c)

(a) $\Leftrightarrow$ (c)

(a) $\Rightarrow$ (c)

Por (a) já temos que $V = U + W$

$U \cap W = \{0\} \Rightarrow \dim U \cap W = 0$

Logo, $\dim U + \dim W - \underbrace{\dim U \cap W}_{=0} = \dim(U + V)$

(c) $\Rightarrow$ (a)

Já temos que $V = U + W$.

Pela fórmula, $\dim U + \dim = \dim(U + W)$

$U \cap W = \{0\}$

(15) Use a fórmula do exercício 16

$\dim \mathbb{R}^9 = 9$

$U + W \subset \mathbb{R}^9 \Rightarrow \dim(U+W) \leq 9.$

Pela fórmula $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

Como $\dim U + \dim W = 10$ e $\dim(U+W) \leq 9$,

temos que $\dim(U \cap W) > 0 \Rightarrow U \cap W \neq \{0\}$.
(é ≥ 1)

Lista 4 _ Exercício 10

Seja $W \subset V$ (subespaço). Um suplementar de W é um subespaço U de V tal que

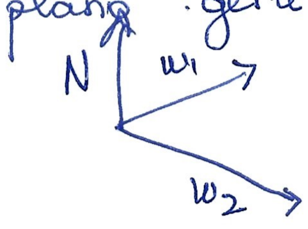
$U \oplus W = V.$

(a) $W = \{(x,y,z) \mid x + 2y - z = 0\}$

Basta tomar um subespaço U tal que se B_U é uma base de U e B_W é uma base de W, então $B_U \cup B_W$ é base de $\mathbb{R}^3$.

Aqui, no caso, W é um plano de $\mathbb{R}^3$.

Geometricamente, um vetor normal ao plano gera um suplementar de W.



$(x,y,z) \in W \Leftrightarrow$

$z = x + 2y$

Os vetor de W são então da forma

$$(x, y, x+2y) = x\underbrace{(1,0,1)}_{w_1} + y\underbrace{(0,1,2)}_{w_2}$$

$U = [(1,1,1),\ (1,3,-1)]$

$U \oplus W = \mathbb{R}^3$

(c) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$

$t = -x - y - z$

Se $(x, y, z, t) \in W \Rightarrow t = -x - y - z$

$$(x, y, z, -x-y-z) = x\underbrace{(1,0,0,-1)}_{w_1} + y\underbrace{(0,1,0,-1)}_{w_2} + z\underbrace{(0,0,1,-1)}_{w_3}.$$

Os vetores w_1, w_2 e w_3 formam uma base de W pois:

(1) Eles geram W;

(2) $\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{matrix} \end{array}$ $\{w_1, w_2, w_3\}$ é LI

Para achar um suplementar de W basta tomar $v \in \mathbb{R}^4$ tq $\{v, w_1, w_2, w_3\}$ é LI.

Se $U = [v]$, então $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

(Basta tomar, por exemplo, $v = (1,1,1,1)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L4+L1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L4+L2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

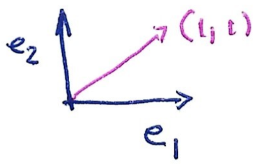
$$\xrightarrow{L4+L3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$
)

(12) FALSO

Em $\mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l} U = (1,0) \\ W_1 = (0,1) \end{array}\right\} \quad U \oplus W_1 = \mathbb{R}^2 \qquad \text{e } W_1 \neq W_2$$

$$W_2 = (1,1) \qquad U \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$$



(13) Sejam U_1, U_2, W_1 e W_2 subespaços de V tais que $U_1 \oplus W_1 = U_2 \oplus W_2$.
Mostre que se $U_1 \subset U_2$ e $W_1 \subset W_2$ então $U_1 = U_2$ e $W_1 = W_2$

Sejam $u \in U_2$ e $w \in W_2$. Mostrar que $u \in U_1$. $w \in W_1$

Então $u + w \in U_2 \oplus W_2 = U_1 \oplus W_1$.

Logo, existem $u_1 \in U_1$ e $w_1 \in W_1$ com
$u + w = u_1 + w_1$.

Mas $u + w = u_1 + w_1 \Longrightarrow \underbrace{u - u_1}_{\in U_2} = \underbrace{w_1 - w}_{\in W_2}$.

Logo $u - u_1 = w_1 - w \in U_2 \cap W_2 = \{0\}$

Portanto $u = u_1$ e $w = w_1$ e
então $u \in U_1$ e $w \in W_1 \Longrightarrow U_2 \subset U_1$ e $W_2 \subset W_2$.

$\{w_1, w_2\}$ é LI

$N = (1, 2, -1)$ é vetor normal ao plano

$$\begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & N \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\{w_1, w_2, N\}$ é LI e então é uma base de $\mathbb{R}^3$ (pois tem 3 vetores)

$\mathbb{R}^3 = W \oplus U$, com

$U = [(1, 2, -1)]$,

(b) $W = \{(x, y, z) \mid \underbrace{x+y+z=0}_{\text{plano}} \text{ e } \underbrace{x+3y-z=0}_{\text{plano}}\}$

planos não paralelos, já que os vetores normais desses planos $N_1 = (1, 1, 1)$ e $N_2 = (1, 3, -1)$ não são paralelos.

A interseção dos dois planos é uma reta.

Logo W é uma reta.

$x + y + z = 0$ e $x + 3y - z = 0$

$\Rightarrow z = x + 3y$ e $x + y + x + 3y = 0$

$\Rightarrow 2x + 4y = 0$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$

$z = x + 3\left(-\frac{1}{2}x\right)$

$z = x - \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}x$.

$W = \{(x, -\frac{1}{2}x, -\frac{1}{2}x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$W = [(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})]$