Aula 11

O espaço das transformações lineares

Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$.

Def. Denotamos por $L(U,V)$ o conjunto de todas as transformações lineares $T: U \longmapsto V$.

OBS: $L(U,V) \subset \mathcal{F}(U,V)$ é um subespaço. De fato, $0 \in L(U,V)$ e $\forall\ T, S \in L(U,V)$ temos que $\alpha T + S \in L(U,V)$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Teo: Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ com $\dim U = n$ e $\dim V = m$, $n, m \in \mathbb{N}$. Então

$$\dim L(U,V) = n \cdot m.$$

dem. Sejam $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_m\}$ bases de U e V. Considere agora a seguinte transformação: $\phi : \mathcal{L}(U,V) \longmapsto M_{m \times n}(\mathbb{K})$

com $\phi(T) = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

(i) ϕ é linear. Com efeito, $\forall$ T e $S \in \mathcal{L}(U,V)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ temos $\phi(\alpha T + S) = \left[[(\alpha T + S)(u_1)]_{\mathcal{B}'} \cdots [(\alpha T + S)(u_n)]_{\mathcal{B}'} \right]$

$$= \left[\alpha [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} + [S(u_1)]_{\mathcal{B}'} \quad \cdots \quad \alpha [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} + [S(u_n)]_{\mathcal{B}'} \right]$$

$$= \alpha \left[[T(u_1)]_{\mathcal{B}'} \cdots [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \right] + \left[[S(u_1)]_{\mathcal{B}'} \cdots [S(u_n)]_{\mathcal{B}'} \right]$$

$$= \alpha [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} + [S]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.$$

(ii) ϕ é injetora pois $\phi(T) = 0 \Rightarrow T = 0$.

(iii) ϕ é sobrejetora pois dada $M \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$T(u) = \Big[M[u]_{B}\Big]_{B'} \in L(U,V) \text{ e é única.}$$

(Veja Aula 10)

Assim $L(U,V) \simeq M_{m\times n}(\mathbb{K}) \Rightarrow \dim L(U,V) = m \cdot n$.

$\blacksquare$

OBS: • A prova do teorema acima nos dá que $L(U,V)$ e $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ são isomorfismos.

• Qdo $U = V$, chamamos $T \in L(U,U)$ operador linear e chamamos $L(U,U)$ o espaço dos operadores lineares de U em U.