MAT0220 - Lista 1

1) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = f(x+iy) = e^y e^{ix},$$

para todos x, $y \in \mathbb{R}$.

Determine os pontos de $\mathbb{C}$ em que f é

(a) contínua.

(b) diferenciável.

(c) analítica.

2) Seja Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$. Prove que, se uma função analítica $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in \Omega$, então f é constante.

3) Prove que se f e $\bar{f}$ são analíticas em um domínio (i.e., um conjunto aberto e conexo não-vazio), então f é constante.

4) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Mostre que, se $|f|$ é constante, então f é constante.

5) Seja Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$. Determine todas as funções $f : \Omega \to \mathbb{C}$ com a seguinte propriedade: para todo $z \in \Omega$, $f(z) = 0$ ou $f'(z) = 0$.

6) Encontre todas as funções analíticas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ ($u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$), tais que $u(x,y) = x^2 - y^2$ para todos x, $y \in \mathbb{R}$.

7) Calcule $\int_\gamma f(z)\,dz$ onde:

(a) $f(x+iy) = y - x - 3x^2 i$ e γ é o segmento de reta ligando 0 a $1+i$.

(b) $f(x+iy) = y - x - 3x^2 i$ e γ é o segmento de reta ligando 0 a i concatenado com o segmento de i a $1+i$.

8) Seja γ o contorno do triângulo de vértices 0, -4 e $3i$ no plano complexo. Prove que

$$\left| \int_\gamma (e^z - \bar{z})\,dz \right| \leq 60.$$

9) Calcule

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+4},$$

onde γ é a circunferência de centro i e raio 2, percorrida no sentido anti-horário.

10) Seja f analítica num domínio limitado D e contínua no fecho $\bar{D}$. Suponha que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \bar{D}$. Sendo m o valor mínimo de $|f|$ em $\bar{D}$, prove que $|f(z)| > m$ para todo $z \in D$, a menos que f seja constante.

11) Dê um exemplo para mostrar que $|f(z)|$ pode assumir seu valor mínimo num ponto interior de um domímio em que f é analítica, se esse valor mínimo é zero.

12) Seja f analítica num domínio limitado D e contínua no fecho $\bar{D}$. Sendo M o valor máximo de $\mathrm{Re}(f)$ em $\bar{D}$, prove que $\mathrm{Re}(f(z)) < M$ para todo $z \in D$, a menos que f seja constante.

13) Seja f uma função inteira tal que $|f(z)| \geq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Prove que f é constante.