

Introdução à Física de Plasmas e Fusão Nuclear

Lista 2 - entrega: 06/12/2023

1. Durante as aulas da disciplina, ao deduzirmos uma expressão para a frequência de oscilação de plasma foi feita a suposição de que os íons estariam estáticos. Ou seja, seu movimento não foi levado em conta nos cálculos. Seguindo os passos explicitados abaixo, encontre uma expressão para frequência de oscilação de plasma que leve em conta o movimento dos íons.

(a) Linearização do modelo

Partindo das equações de fluido:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0 \quad (1)$$

$$m_\alpha n_\alpha \left[\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha \right] = q_\alpha n_\alpha \mathbf{E} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_j q_j n_j = \frac{e(n_i - n_e)}{\epsilon_0}, \quad (3)$$

separe as variáveis em um termo de equilíbrio e um termo perturbado, ex.: $A = A_0 + A_1$. Lembre-se de desprezar termos de segunda ordem.

(b) Decomposição em Fourier

Considere que o plasma, antes de ser perturbado, esteja em um equilíbrio descrito por

$$\nabla n_0 = \mathbf{u}_0 = \mathbf{E}_0 = 0 \quad (4)$$

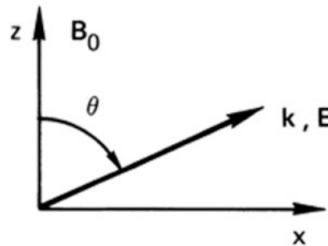
e escreva as quantidades perturbadas como $A_1 = A_1 \exp[i(kx - \omega t)]$. Considere o sistema como sendo unidimensional, onde as ondas propagam-se na direção x .

(c) Relação de dispersão

Manipule as equações algébricas e encontre a relação de dispersão. Argumente sobre a validade de desconsiderarmos o movimento dos íons nesse processo.

2. Considere ondas de plasma-elétron propagando em um plasma com $k_B T_e = 100 \text{ eV}$, $n = 10^{16} \text{ m}^{-3}$ e $B = 0$. Se a frequência f de excitação aplicada externamente é 1.1 GHz, determine o comprimento de onda λ em cm.

3. No estudo das oscilações longitudinais eletrostáticas de elétrons em um plasma imerso em um campo magnético \mathbf{B}_0 (feito em aula), foram deduzidas as relações de dispersão para o caso de ondas que se propagam nas direções paralela e perpendicular (relativo ao campo magnético de equilíbrio). Agora, iremos analisar o caso em que o vetor de onda \mathbf{k} está orientado em uma angulação θ arbitrária em relação a \mathbf{B}_0 . Para resolver esse problema, oriente o eixo x de tal forma que \mathbf{k} e \mathbf{E} estejam sobre o plano $x - z$, conforme a figura abaixo.



$$E_x = E_1 \sin \theta, E_y = 0, E_z = E_1 \cos \theta$$

- (a) De forma análoga ao processo descrito no exercício 1, parta das equações do modelo de fluido e da lei de Gauss, separe as variáveis do sistema em um termo de equilíbrio e um termo perturbado e linearize o sistema desprezando termos perturbativos quadráticos.
- (b) Considere que o plasma, antes de ser perturbado, esteja em um equilíbrio descrito por

$$\nabla n_0 = \mathbf{u}_0 = \mathbf{E}_0 = 0 \quad (5)$$

e escreva as quantidades perturbadas como $A_1 = A_1 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$.

- (c) Manipule o sistema de equações linearizadas e mostre que a relação de dispersão é dada por

$$\omega^2(\omega^2 - \omega_{uh}^2) + \Omega_{ce}^2 \omega_{pe}^2 \cos^2 \theta = 0 \quad (6)$$

- (d) Resolva essa equação para ω^2 . Você deve encontrar duas soluções. Mostre que nos limites $\theta \rightarrow 0$ e $\theta \rightarrow \pi/2$ uma das soluções reduz-se aos resultados encontrados em aula para os casos em que as oscilações propagam-se perpendicular e paralelamente a \mathbf{B}_0 , enquanto a outra solução não tem significado físico.

4. Um veículo espacial em reentrada na atmosfera terrestre sofre uma interrupção de comunicações devido a formação de um plasma pela onda de choque à frente da cápsula. Supondo que o sistema de comunicação opere com uma frequência de 300 MHz, qual é o menor valor da densidade de plasma que causa uma perda de comunicação com o veículo espacial? Explique a relação entre a frequência de plasma, a frequência de operação do sistema de comunicação e o processo de *cutoff* que resulta na perda de comunicação.

5. A seção de choque associada a uma colisão entre um elétron com energia $k_B T_e = 2 \text{ eV}$ e um átomo neutro de He é aproximadamente $6\pi a_0^2$, onde $a_0 = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$ é o raio de Bohr. Considere uma coluna de plasma de He, sem campo magnético, com pressão de 1 Torr, cuja temperatura dos íons seja $k_B T_i = 2 \text{ eV}$ e calcule:

- (a) O coeficiente de difusão dos elétrons em m^2/s , assumindo que, para elétrons de 2 eV , $\langle \sigma v \rangle$ seja igual ao produto simples σv ;

- (b) O campo elétrico necessário ao longo da coluna de plasma para criar uma densidade de corrente de plasma constante igual a 2 kA/m^2 . Considere a densidade de plasma $n_0 = 1 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$.
6. Um plasma fracamente ionizado ocupa uma caixa cúbica de alumínio cujas laterais tem comprimento L e decai por difusão ambipolar.
- (a) Escreva a expressão para a distribuição de densidade de plasma no modo de difusão mais baixo/lento.
- (b) Defina o significado da constante de tempo de decaimento e calcule-a para $D_a = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$
7. Uma coluna cilíndrica de plasma tem distribuição de densidade

$$n(r) = n_0(1 - r^2/a^2), \quad (7)$$

sendo $a = 10 \text{ cm}$ e $n_0 = 1 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$. Se $k_B T_e = 100 \text{ eV}$, $k_B T_i = 0$ e o campo magnético axial $B_0 = 1 \text{ T}$, qual é a razão entre o coeficiente de difusão de Bohm e o coeficiente de difusão clássico perpendicular a B_0 .

8. Em tokamaks, a corrente de plasma é induzida por meio de um campo elétrico aplicado ao longo do campo magnético B_0 . Quantos V/m devem ser aplicados ao plasma para que seja induzida uma corrente de plasma igual à 300 kA . Considere um plasma totalmente ionizado, com área de seção transversal igual à 5000 cm^2 , no qual os elétrons possuem $k_B T_e = 500 \text{ eV}$?