Equação do calor em $\mathbb{R}^p$
Corolários do Princípio do Máximo

BMA BMAC 2023

O Princípio do máximo

$\Omega \subset \mathbb{R}^p$ aberto, limitado, $k > 0$.

Princípio do máximo

Fato 1

Considere $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times [0, +\infty[) \cap \mathcal{C}^2(\Omega \times (0, +\infty))$ *tal que* $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k^2 \Delta u(x, t) = 0, \ \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$.
Então, se $T > 0$, $U^T = \overline{\Omega} \times [0, T]$ *e* $\widetilde{U}^T = \overline{\Omega} \times \{0\} \cup \partial\Omega \times [0, T]$, *tem–se que*

$$\max u\big|_{U^T} = \max u\big|_{\widetilde{U}^T}.$$

O corolário fundamental

Corolário 1

Sejam $u_0 : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $u_1 : \partial\Omega \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *contínuas.*
Suponha que $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times [0, +\infty[) \cap \mathcal{C}^2(\Omega \times (0, +\infty))$ *satisfaz*

1. $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k^2 \Delta u(x, t) = 0, \ \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$
2. $u(x, 0) = u_0(x), \ \forall x \in \overline{\Omega}$
3. $u(x, t) = u_1(x, t), \ \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, +\infty[$

então, se $M_0 = \max u_0, \ m_0 = \min u_0, \ M_1 = \max u_1|_{\partial\Omega \times [0, T]}$ *e* $m_1 = \min u_1|_{\partial\Omega \times [0, T]}$*, tem–se*

$$\min\{m_0, m_1\} \leq u(x, t) \leq \max\{M_0, M_1\}, \ \forall (x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T].$$

.

O problema do Calor em domínios limitados

Vai estudar-se o seguinte problema:

Problema do Calor com temperatura dada em $\partial\Omega$ (PC1)

Seja Ω um aberto limitado e suponha que $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \partial\Omega \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas.
Admita que $f(x) = g(x, 0)\ \forall x \in \partial\Omega$ (compatibilidade).
Determinar $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times [0, +\infty[, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega \times (0, +\infty), \mathbb{R})$ tal que:

1. $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k^2 \Delta u(x, t) = 0,\ \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$
2. $u(x, 0) = f(x),\ \forall x \in \overline{\Omega}$
3. $u(x, t) = g(x, t),\ \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, +\infty[$.

Observação Esse problema será chamado (PC1) *com dados iniciais e de contorno* (f, g).

(PC1): Unicidade e dependência contínua de soluções.

Fato 2

O problema (PC1) tem no máximo uma solução.

(PC1): Unicidade e dependência contínua de soluções.

Fato 2

O problema (PC1) tem no máximo uma solução.

Fato 3

Suponha que $(f, \widetilde{f}) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ *e* $(g, \widetilde{g}) \in \mathcal{C}(\partial\Omega \times [0, +\infty[, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}(\partial\Omega \times [0, +\infty[, \mathbb{R})$ *são tais que, para um certo* $\varepsilon > 0$ *tem–se*

1. $|f(x) - \widetilde{f}(x)| \leq \varepsilon, \ \forall x \in \overline{\Omega}$
2. *Existe* $T > 0$ *tal que* $|g(x,t) - \widetilde{g}(x,t)| \leq \varepsilon, \ \forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0, T]$.

Se u *e* $\widetilde{u}$ *são soluções do (PC1) para as condições iniciais e de contorno, respectivamente,* (f, g) *e* $(\widetilde{f}, \widetilde{g})$*, então*

$$|u(x,t) - \widetilde{u}(x,t)| \leq \varepsilon, \ \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0, T].$$

Na forma de convergência

Suponha que:

1. $f_n : \overline{\Omega} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbb{R}$ é uma sequência que converge uniformemente para $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$
2. $g_n : \partial\Omega \times [0, +\infty[\xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbb{R}$ é uma sequência que, para todo $T > 0$, converge uniformemente em $\partial\Omega \times [0, T]$ para $g : \partial\Omega \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

Se u_n é a solução do (PC1) para as condições iniciais e de contorno (f_n, g_n) e u é a solução do (PC1) para as condições iniciais e de contorno (f, g) então u_n converge uniformemente para u em $\overline{\Omega} \times [0, T]$, $\forall T > 0$.