



PNV 5856

METODOLOGIA DE CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS

AULA 5

Prof. Helio Mitio Morishita

2023

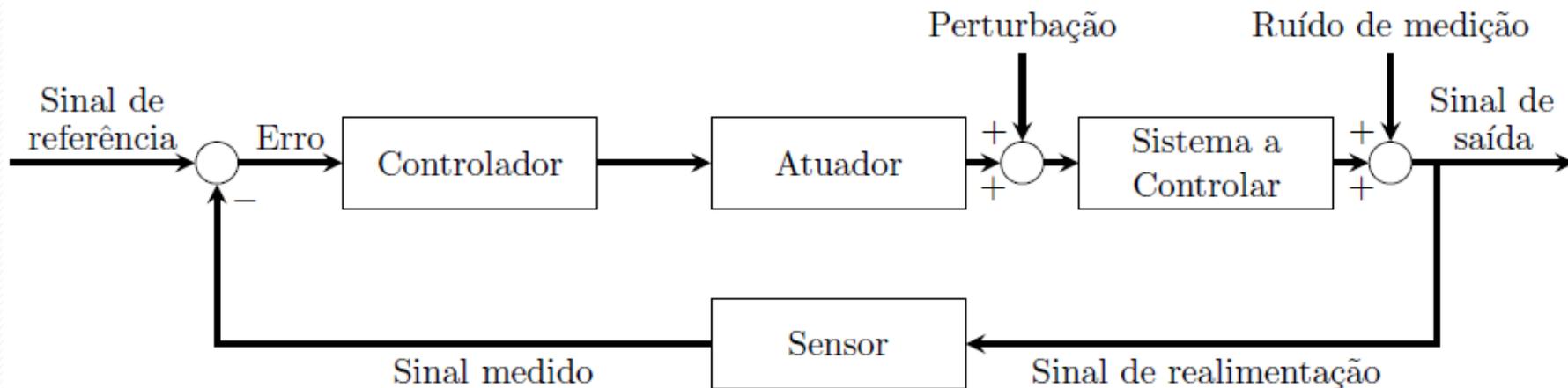


# ESPAÇO DE ESTADOS

## CONTROLADOR POR ALOCAÇÃO DE PÓLOS



# Malha de controle fechada com perturbações e ruídos





## CONTROLADOR POR ALOCAÇÃO DE PÓLOS

**ATENÇÃO:** Nesta seção será admitido que todos os componentes do vetor de estado são acessíveis através de medições.

Inicialmente será estudado o problema de regulação. Considere um sistema escalar com as seguintes equações de estado:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ ;  $B = b = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_k]^T$

A lei de controle linear para um regulador é dada por:

$$u = -Gx \quad (2)$$

Convém observar que não está sendo considerado perturbações como a referência e entradas exógenas porque elas não são controláveis.

Inicialmente será considerado o caso escalar.



O projeto do controlador consiste em determinar o seguinte vetor:

$$G = g^T = [ g_1 \quad g_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad g_k ] \quad (3)$$

Desta forma, substituindo a Eq. 3 em 2 a lei de controle é dada por:

$$u = -Gx = -g^T x$$

Considerando esta lei de controle, a dinâmica da equação de estado em malha fechada é:

$$\dot{x} = (A - bg^T)x = A_c x \quad (4)$$

Os coeficientes do vetor  $g$  pode serm obtidos através dos autovalores da matriz  $A_c$ , isto é:

$$|sI - A_c| = |sI - A + bg^T| = s^k + \bar{a}_1 s^{k-1} + \bar{a}_2 s^{k-2} + \dots + \bar{a}_k \quad (5)$$

Onde  $\bar{a}_i$  são os coeficientes do polinômio da equação característica com os termos desconhecidos do vetor  $g_i, i = 1, 2, \dots, k$ .



$$|sI - A_c| = |sI - A + bg^T| = s^k + \bar{a}_1 s^{k-1} + \bar{a}_2 s^{k-2} + \dots + \bar{a}_k \quad (5)$$

Os elementos do vetor  $g$  podem ser obtidos igualando a Eq. 5 com a equação com os pólos desejados. No entanto, este procedimento, dependendo da ordem do sistema, pode-se incorrer em uma quantidade substancial de cálculos numéricos.



Alternativamente, se a equação de estado é dada na sua forma canônica a solução é bem mais simples. Considere a matriz  $A$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{k-1} & -a_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$bg^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} [g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_k] \quad (7)$$



Desta forma tem-se:

$$A_c = A - bg^T = \begin{bmatrix} -a_1 - g_1 & -a_2 - g_2 & \dots & -a_k - g_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Desta forma, os termos do vetor  $g$  pode ser obtidos como:

$$a_i + g_i = \hat{a}_i \quad \Rightarrow \quad g_i = \hat{a}_i - a_i; \quad i = 1, 2..k \quad (9)$$

Os termos  $\hat{a}_i$  podem ser obtidos a partir dos pólos desejados do sistema.

$$|sI - A_c| = s^k + \hat{a}_1 s^{k-1} + \dots + \hat{a}_k = (s - s_1^*)(s - s_2^*) \dots (s - s_k^*)$$

onde  $s_i^*$  são os pólos desejados do sistema.



## Exercício

A dinâmica de um sistema é dada por:  $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u$

Deseja-se projetar um controlador no espaço de estados com os pólos desejados  $s_1^* = -1.5$  e  $s_2^* = -2.5$ .



Mas, infelizmente, no caso geral, a dinâmica do sistema não é dada na forma de equações canônicas. No entanto, estas equações canônicas podem ser obtidas se for efetuada uma mudança de variáveis.

$$\bar{x} = \bar{T}x \quad (11)$$

Com esta mudança de variáveis, já foi mostrado que a equação de estado é dada por:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \quad (12)$$

onde

$$\bar{A} = \bar{T}A\bar{T}^{-1} \quad \text{e} \quad \bar{b} = \bar{T}b$$



Para o sistema transformado o ganho é obtido como:

$$\bar{g} = \hat{a} - \bar{a} = \hat{a} - a \quad (\bar{a} = a) \quad (13)$$

A lei de controle no sistema original é dada por:

$$u = -g^T x = -g^T \bar{T}^{-1} \bar{x} = -\bar{g}^T \bar{x} \quad (14)$$

Pela Eq. 14 tem-se

$$\bar{g}^T = g^T \bar{T}^{-1} \quad \Rightarrow \quad g = \bar{T}^T (\hat{a} - a) \quad (15)$$

Obtenção da matriz  $\bar{T}$ : ver o Cap. 6 do livro texto da disciplina.



## Sistemas com múltiplas entradas

Neste caso, a matriz  $B$  tem mais de uma coluna e a matriz  $G$  tem mais de uma linha. Isto significa que haverá mais incógnitas do que equações. Como exemplo, considere um sistema de 3<sup>a</sup> ordem com duas entradas, isto é,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

A lei de controle é dada por:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & g_{1,3} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & g_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Portanto, ao calcularmos a equação que determina os autovalores teremos 6 incógnitas e 3 equações. A solução é admitirmos valores para 3 deles e obter a lei de controle. (Ver a seção 6.3 do livro texto)



## SISTEMAS COM VARIÁVEIS EXÓGENAS: MUDANÇA DE REFERÊNCIA E PERTURBAÇÕES

Considere uma sistema linear com perturbação que pode ser incluída na equação de estado como:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fx_d \quad (17)$$

onde  $x_d$  é o vetor de perturbação que pode ser medida ou não.

Além disso, pode haver interesse que o vetor de estado siga uma determinada referência  $x_r$ .

Neste caso o projeto do controlador é realizado considerando-se o erro do sistema, isto é:

$$e = x - x_r \quad (18)$$

e admite-se que  $x_r$  satisfaz a seguinte equação:

$$\dot{x}_r = A_r x_r \quad (19)$$



$$\dot{x} = Ax + Bu + Fx_d \quad (17)$$

$$e = x - x_r \quad (18)$$

$$\dot{x}_r = A_r x_r \quad (19)$$

Derivando a Eq. 18 e considerando as Eqs 17 e 19 tem-se:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_r = Ae + (A - A_r)x_r + Fx_d + Bu = Ae + Bu + Ex_0 \quad (20)$$

onde  $E = [A - A_r \quad F]$  e  $x_0 = \begin{bmatrix} x_r \\ x_d \end{bmatrix}$

O vetor  $x_0$  representa os sinais exógenos do sistema.

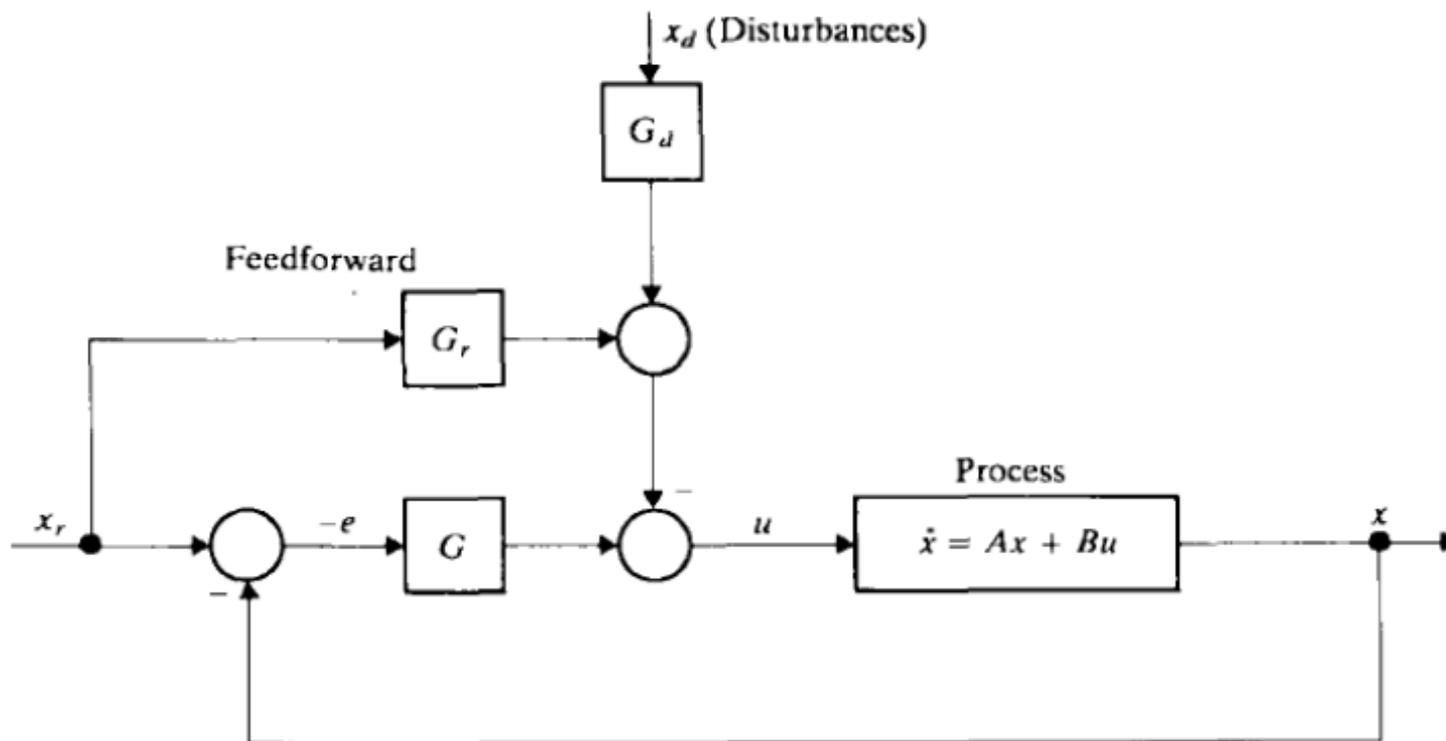


A lei de controle a ser considerada no espaço de estados voltada para sistemas lineares é dada por:

$$u = -Ge - G_0x_0 = -Ge - G_r x_r - G_d x_d \quad (21)$$

Observe que o vetor  $x_0$  é tratado como entrada tal como o vetor  $u$ . Substituindo a lei de controle definida pela Eq. 21 na Eq. 20 obtem-se a dinâmica do erro em malha fechada:

$$\dot{e} = Ae + Ex_0 - B(Ge + G_0x_0) \quad (22)$$



**Figure 6.4** Schematic of feedback system for process with reference state and disturbance input.



Para projetar o controlador pode-se adotar os seguintes objetivos para o desempenho do controlador:

- O sistema controlado em malha fechada deve ser assintoticamente estável;
- A combinação linear da variável de estado do erro deve ser zerada.

A condição de regime permanente é caracterizado por um vetor de erro constante, isto é,

$$\dot{e} \equiv 0 \quad (23)$$



Com esta consideração, pode-se verificar através da equação 22 que:

$$(A - BG)e = (BG_0 - E)x_0$$

Se o sistema em malha fechada for assintoticamente estável, a matriz  $A - BG = A_c$  não tem nenhuma raiz da sua equação característica na origem. Assim, o erro em regime permanente é dado por:

$$e = (A - BG)^{-1}(BG_0 - E)x_0 \tag{24}$$

Em vez de impor que o erro seja zero, pode-se desejar que:

$$y = Ce \equiv 0 \tag{25}$$

Onde  $C$  é uma matriz singular com dimensões adequadas.



Mas o que são dimensões adequadas?

Se a Eq. 25 é válida, então obtem-se através da Eq. 24 que:

$$C(A - BG)^{-1}(BG_0 - E)x_0 = 0 \quad (26)$$

Observe que a Eq. 26 deve valer para qualquer vetor  $x_0$ . Isto só ocorre se:

$$C(A - BG)^{-1}(BG_0 - E) = 0 \quad (27)$$



A Eq. 27 pode ser reescrita como:

$$C(A - BG)^{-1}BG_0 = C(A - BG)^{-1}E \quad (28)$$

Admita que o vetor de saída  $y$  tem dimensão  $j$ . No livro texto está discutido que se  $j > m$  a Eq. 28 é "sobre determinado", isto é, há excesso de condições a ser satisfeita pela matriz  $G_0$  e, em caso contrário, é "subdeterminado" com mais variáveis do que equações.



Explicação: Considere as seguintes ordens das matrizes:

$$C \in \mathbb{R}^{j \times k}, \quad (A - BG)^{-1} \in \mathbb{R}^{k \times k}, \quad B \in \mathbb{R}^{k \times m}, \quad E \in \mathbb{R}^{k \times n}$$

onde  $k$  é a ordem das variáveis de estado,  $m$  é número das variáveis de entrada,  $n$  é a ordem do vetor dos termos exógenos.

Com isso tem-se que  $G_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

$$\underbrace{C(A - BG)^{-1}B}_{H^{j \times m}} \underbrace{G_0}_{G_0^{m \times n}} = C(A - BG)^{-1}E$$

Portanto,  $HG_0 \in \mathbb{R}^{j \times n}$ . Com isso tem que se  $j > m$  haverá mais equações do que incógnitas. Se, ao contrário,  $j < m$  haverá mais incógnitas do que equações.



O caso ideal é quando o número da variáveis de entrada ( $u$ ) é igual do ao vetor da saída ( $y$ ), isto é,  $l = m$ . Se, sob estas condições, a matriz  $C(A - BG)^{-1}B$  for não singular tem-se:

$$G_0 = \underbrace{[C(A - BG)^{-1}B]^{-1}C(A - BG)^{-1}}_{B^*} E \quad (29)$$

Ou seja, o ganho  $G_0$  pode ser obtido como:

$$G_0 = B^* E \quad (30)$$



Mas, na matriz  $B^*$  comparece a inversão da matriz  $C(A - BG)^{-1}B$ .

Em que condições existe a inversa desta matriz?

Pode-se provar que existe a inversa da matriz se:

$$\lim_{s \rightarrow 0} H_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} [C(sI - A)^{-1}B] \neq 0 \quad (31)$$

Se a matriz  $A$  for não singular a condição acima se reduz a  $CA^{-1}B \neq 0$



## 6.5 WHERE SHOULD THE CLOSED-LOOP POLES BE PLACED?

Having determined that the closed-loop poles of a controllable system can be placed anywhere, it is natural to ask **where the poles should be placed**. To assert that they should be placed to meet the performance requirements is begging the question, which is how to relate **the performance requirements to the gain matrix  $G$  that is used in the implementation of the feedback law**. A systematic method of selecting the gains by minimizing a quadratic performance integral is given in Chap. 9. That method has many advantages but it is by no means the only method available. Among the concerns that the designer might wish to address are those to be discussed in this section.



The control law for a regulator  $u = -Gx$  implies that for a given state  $x$  the larger the gain, the larger the control input. There are limits on the control input in practical systems: The actuator which supplies the control  $u$  cannot be arbitrarily large without incurring penalties of cost and weight. Other reasons for limiting the control may be to avoid the potential damaging effects of stresses on the process that large inputs might cause. If the control signal generated by the linear feedback law  $u = -Gx$  is larger than possible or permissible for reasons of safety, the actuator will "saturate" at a lower input level. The effect



reasons of safety, the actuator will “saturate” at a lower input level. The effect of occasional control saturation is usually not serious: in fact a system which never saturates is very likely overdesigned, having a larger and less efficient actuator than is needed to accomplish even the most demanding tasks. On the other hand, if the control signals produced by the linear control law are so large that the actuator is almost always saturated, it is not likely that the system behavior will be satisfactory, unless the actuator saturation is explicitly accounted for in an intentionally nonlinear (e.g., “bang-bang”) control law design. If such a design is not intended, the gain matrix should be selected to avoid excessively large control signals for the range of states that the control system can encounter during operation.



The effect of control system gain on pole locations can be appreciated by considering the Bass-Gura formula (6.34) for a single-input system. (Qualitatively, similar considerations apply to multiple-input systems.) Note first that the gains are proportional to the amounts that the poles are to be moved, i.e., to the distance that the coefficients of the characteristic polynomial must move between the open-loop and the closed-loop system. The less the poles are moved, the smaller the gain matrix. Thus, large system gains are avoided by limiting the changes in the coefficients of the characteristic equation. It is also noted that the control system gains are inversely proportional to the controllability test matrix. The less controllable the system, the larger the gains that are needed to effect a change in the system poles. There is nothing surprising about this.

The inference that may be reasonably drawn from this is that the distance



The inference that may be reasonably drawn from this is that the designer should **not attempt to alter the dynamic behavior of the open-loop process more than is required**. One reason for trying to alter the behavior of a process is to stabilize it, if it is unstable, or to increase its stability by moving its poles into the interior of the left half of the  $s$  plane. Although stability is the most important consideration it is not the only consideration. **Speed of response (i.e., bandwidth) is also important**. Fast response—high bandwidth—of the closed-loop system is often sought after, since the errors in following rapidly changing inputs will be smaller. There may be instances, however, in which the bandwidth of the closed-loop system is intentionally not made as high as it can be. If the reference input contains a good deal of noise, it might be desirable to reduce the bandwidth to prevent the system from becoming excessively agitated by following the noise.



Another reason for limiting the bandwidth of the closed-loop system is the uncertainty of the high-frequency dynamics of the process. A mechanical system, for example, has resonance effects (modes) due to the elasticity of the structural members. The dynamic model used for design ignores many if not all of these effects: their magnitudes are small; the exact frequencies are not easy to determine; the effort required to include them in the model is not justified. Other types of processes (thermal, chemical, etc.) also have uncertain behavior at high frequencies. If the uncertain high-frequency poles are included within the bandwidth of the closed-loop process, these resonances may be excited and result in unexpected high-frequency oscillation, or even instability. A prudent design requires that the loop transmission be well below unity at the frequencies where these resonances may occur.

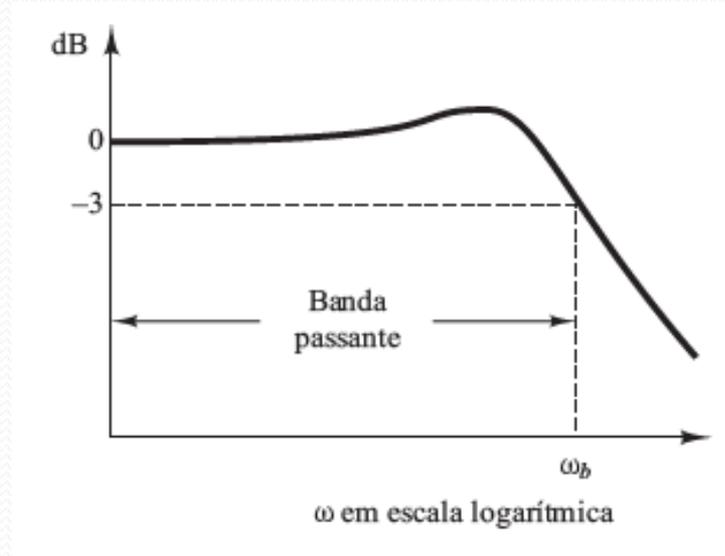


The bandwidth of a system is governed primarily by its *dominant poles*, i.e., the poles with real parts closest to the origin. To see this, visualize the partial-fraction expansion of the transfer function of the system. Terms corresponding to poles whose (negative) real parts are farthest from the origin have relatively high decay rates (damping) and hence, after an initial transient period, they will contribute less to the total response than terms corresponding to poles with real parts close to the origin. (While this behavior is typical of physical processes, there is no theoretical reason why the residues at poles with high damping cannot be much greater than the residues at the poles with less damping. If the highly damped poles have large residues, their effects may persist simply because they start out much larger.)



In order for the transient to decay as rapidly as is required by the poles that are far from the origin, it is necessary to change the energy in the system rapidly; this would require the use of large control inputs. If there are some poles that are far from the origin and others that are close to the origin, the maximum control amplitudes will be governed by the former, but the system speed of response is slowed by the latter. This behavior suggests that the feedback gains are such that the available control is not efficiently used. Efficient use of the control signal would require that all the closed-loop poles be about the same distance from the origin.

## Largura de Banda



Quanto maior a largura de banda a resposta do sistema é mais rápida;

Quanto maior a largura de banda filtra menos os ruídos e perturbações do sistema



Controle de posição no sentido longitudinal de um navio

$$M\ddot{y} + B\dot{y} = f_p$$

$$\frac{Y(s)}{F_p(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs} \Rightarrow 2 \text{ pólos}$$

$$f_p = K_p e + K_i \int_0^t e dt$$

$e = y_r - y$   $y_r$  é a posição de referência.

$$\frac{F_p(s)}{E(s)} = \frac{k_p s + K_i}{s} \Rightarrow 1 \text{ zero e 1 pólo}$$

Em malha fechada tem-se:

$$\frac{Y(s)}{Y_r(s)} = \frac{K_p s + K_i}{Ms^3 + Bs^2 + K_p s + K_i} \Rightarrow 1 \text{ zero e 3 pólos}$$



## LOCALIZAÇÃO DOS POLOS

Um dos procedimentos sugeridos para a alocação dos pólos é distribuí-los mantendo a mesma distância a partir da origem. Isto pode ser efetuado a partir da seguinte equação:

$$\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{2k} = (-1)^{k+1} \quad (32)$$

onde  $k$  é o número dos pólos.

Obtenção dos pólos a partir da Eq. 32, admitindo que  $s = \omega_0 e^{\alpha j}$  e considerando somente os pólos localizados no semiplano esquerdo do plano  $s$ .



$$k = 1$$

$$e^{2\alpha j} = 1 = e^{[2\pi + (n-1)2\pi]j} \Rightarrow \alpha = \pi + (n-1)2\pi$$

Portanto, para  $k = 1$  tem-se  $\alpha = \pi$

$$k = 2$$

$$e^{4\alpha j} = -1 = e^{[(\pi + (n-1)2\pi)]j} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + (n-1)\frac{\pi}{2}$$

Portanto, para  $k = 2$  tem-se:  $\alpha_1 = 3\pi/4$  e  $\alpha_2 = \frac{5\pi}{4}$

$$k = 3$$

$$e^{6\alpha j} = 1 = e^{[\pi + (n-1)2\pi]j} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{3}$$

Portanto, para  $k = 3$  tem-se  $\alpha_1 = 2\pi/3$ ,  $\alpha_2 = \pi$  e  $\alpha_3 = \frac{4\pi}{3}$

$$k = 4$$

$$e^{8\alpha j} = -1 = e^{[\pi + (n-1)2\pi]j} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + (n-1)\frac{\pi}{4}$$

Portanto, para  $k = 4$  tem-se  $\alpha_1 = 5\pi/8$ ,  $\alpha_2 = \frac{7\pi}{8}$ ,  $\alpha_3 = \frac{9\pi}{8}$  e  $\alpha_4 = \frac{11\pi}{8}$ .

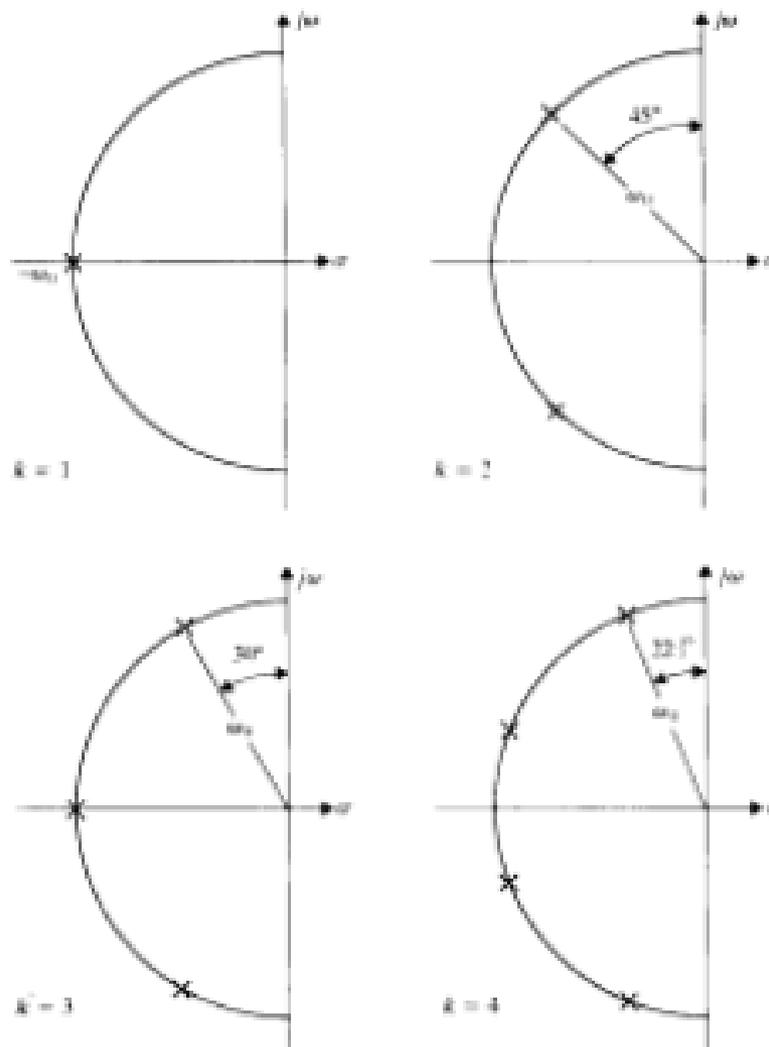


Figure 6.7 Butterworth pole configurations.