PNV 5856

METODOLOGIA DE CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS

AULA 4

.

Prof. Helio Mitio Morishita

2023

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO

Propriedades Estruturais

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$
$$y = C(t)x + D(t)u$$

O modelo no espaço de estado envolve duas equações, isto é, as equações de estado e de saída. A primeira relaciona o vetor de entrada com o vetor de estado, e a segunda o vetor de estado com o vetor de saída. O efeito do vetor de entrada no vetor de estado pode ser avaliado através das propriedades de Alcançabilidade (Reachability) e Controlabilidade (Controllability) e a capacidade de reproduzir o vetor de estado através do vetor de saída é analisado através das propriedades de Observabilidade e Construtibilidade.

Propriedades Estruturais

Para mostrar a importância das propriedades acima, considere um sistema linear, invariante com o tempo definido no espaço de estado com as seguintes matrizes:

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculando a sua função de transferência obtém-se:

$$H(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{1}{s+1}$$

Propriedades Estruturais

Como explicar isto? Um sistema de ordem 4 no espaço de estado se reduz a ordem 1 ao calcular a sua função de transferência

Para tentar entender isto, vamos considerar uma mudança de variáveis de modo que a dinâmica do sistema seja expressa através de uma matriz canônica de Jordan. Seja

$$z = Tx$$

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades Estruturais

Com esta mudança as equações de estado e de saída são dadas por

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u$$
$$y = \bar{C}z$$

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, as equações de estado e de saída são dadas por:

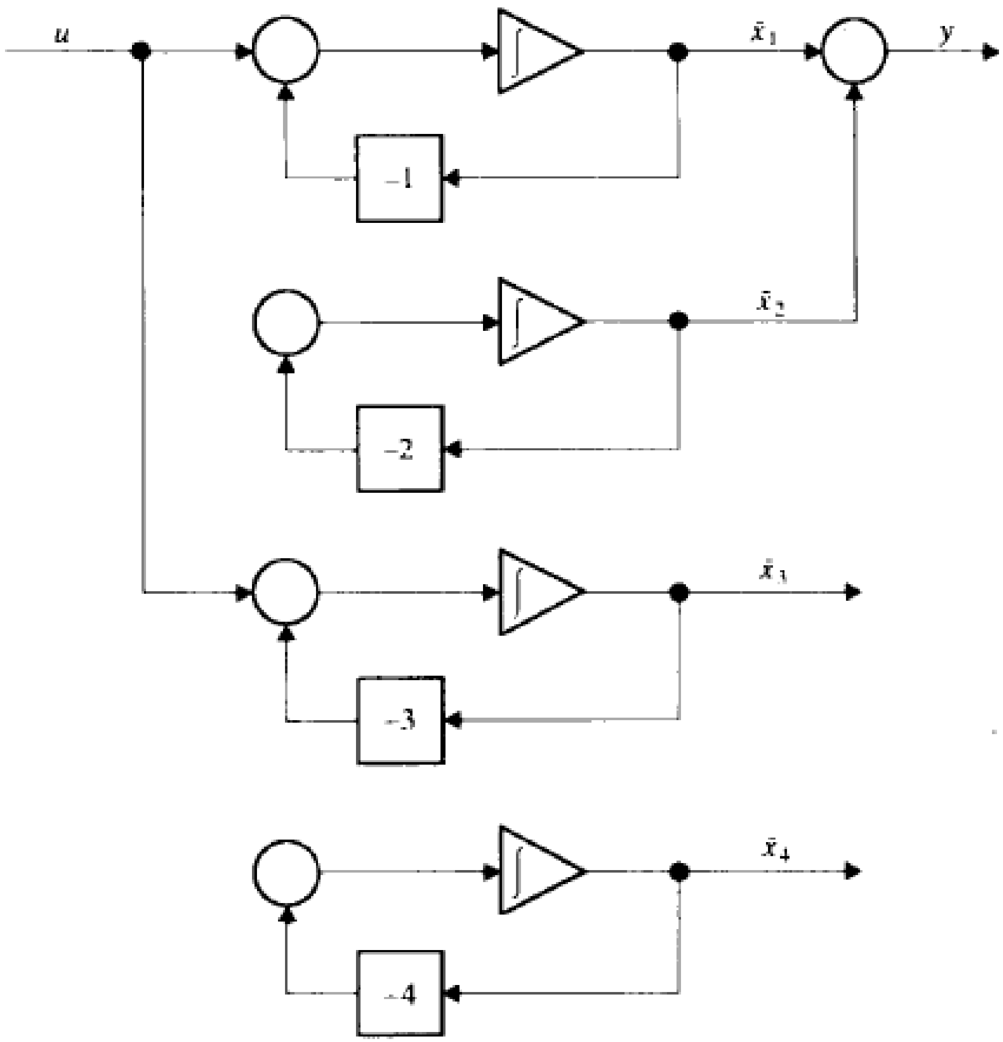
$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= -\bar{x}_1 + u \\ \dot{\bar{x}}_2 &= -2\bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 &= -3\bar{x}_3 + u \\ \dot{\bar{x}}_4 &= -4\bar{x}_4 \\ \\ y &= \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{x}}_1 &= -\bar{x}_1 + u \\
\dot{\bar{x}}_2 &= -2\bar{x}_2 \\
\dot{\bar{x}}_3 &= -3\bar{x}_3 + u \\
\dot{\bar{x}}_4 &= -4\bar{x}_4 \\
\\
y &= \bar{x}_1 + \bar{x}_2
\end{aligned}
$$

- $\dot{\bar{x}}_1$ é afetada pelo sinal de entrada e é visivel na saída;
- $\dot{\bar{x}}_2$ não é afetada pela entrada e é visível na saída;
- $\dot{\bar{x}}_3$ é afetada pela entrada mas não é visível na saída;
- $\dot{\bar{x}}_4$ não é afetada pela entrada e também não é visível na saída.

Ou seja, a função de transferência só relaciona variáveis que são possíveis de serem afetadas pelo sinal de entrada e que sejam visíveis na saída.


u
$\bar{x}_1$
y
−1
$\bar{x}_2$
−2
$\bar{x}_3$
−3
$\bar{x}_4$
−4

Exemplos de sistemas não controláveis

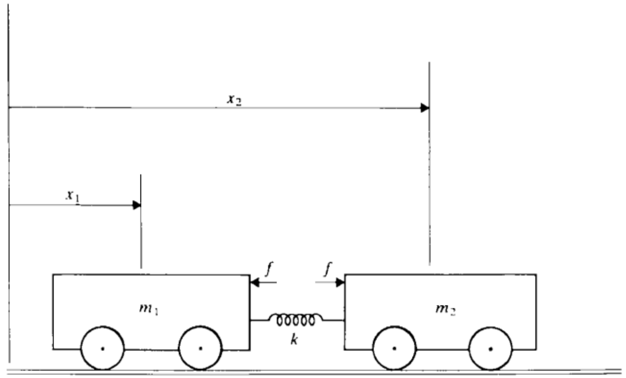


Figure 5.4 Center of mass of system cannot be moved by internal force.

Não é possível controlar o centro de gravidade do sistema

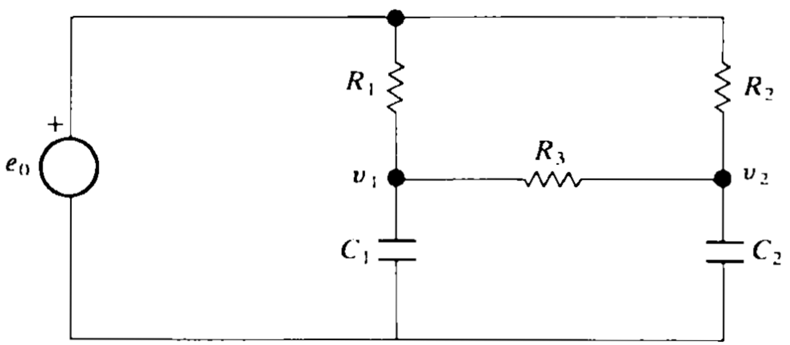


Figure 5.5 Electrical bridge network.

Se $R_1C_1 = R_2C_2$ não será possível controlar a voltagem $\bar{v} = v_2 - v_1$

Exemplo de sistemas não observáveis

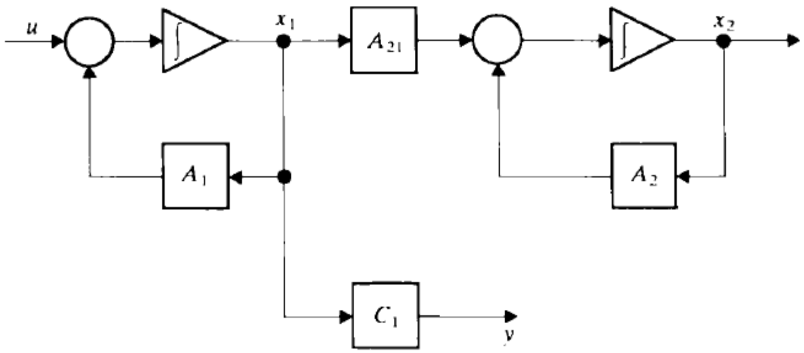


Figure 5.9 Systems in tandem that are unobservable.

Sistemas em configuração tandem onde é lido somente a variável do primeiro subsistema

Observando somente a velocidade de um corpo é impossível determinar a sua posição

Posto de uma matriz

Definição. Seja M uma matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 < k \leq m$ e $0 < k \leq n$. Um **menor de ordem** k de M é o determinante de uma matriz quadrada de ordem k obtida pela remoção de $m-k$ linhas e $n-k$ colunas da matriz M.

Definição. Seja M em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. O **posto coluna (linha)** de M é o número máximo de colunas (linhas) linearmente independentes de M.

Lema. *Seja M uma matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, com $m \leq n$, tal que suas m linhas são linearmente independentes (LI). Então,*

(a) *Existem m colunas de M tais que o determinante da matriz $m \times m$ formado por tais colunas é não zero.*

(b) *Tais m colunas são LI.*

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
http://www.ime.usp.br/~oliveira (2015-2018) oliveira@ime.usp.br

NOÇÕES DE ALCANÇABILIDADE, CONTROLABILIDADE, OBSERVABILIDADE E CONSTRUTIBILIDADE

Considere as seguintes equações do espaço de estados

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

$$y = C(t)x + D(t)u$$

Propriedades Estruturais

Relação entrada-estado $\Rightarrow$ Alcançabilidade e Controlabilidade

Relação saida-estado $\Rightarrow$ Construtibilidade e Observabilidade

Astolfi, A., System and Control Theory – An Introduction

ALCANÇABILIDADE e CONTROLABILIDADE

Considere um sistema linear variante com o tempo definida por:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$
$$y = C(t)x + D(t)u$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^k, \ y \in \mathbb{R}^m.$$

Atenção: mudança de nomenclatura

Para este sistema, uma entrada $u(.)$ transfere o estado $x(t_0)$ para o estado $x(t_1)$ através de

$$x_1 = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Hespanha, J. P., (2009), Linear Systems Theory, Princeton University Press, New Jersey

Definition 11.1 (Reachable subspace). Given two times $t_1 > t_0 \geq 0$, the *reachable* or *controllable-from-the-origin on* $[t_0, t_1]$ subspace $\mathcal{R}[t_0, t_1]$ consists of all states x_1 for which there exists an input $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^k$ that transfers the state from $x(t_0) = 0$ to $x(t_1) = x_1$; i.e.,

$$\mathcal{R}[t_0, t_1] := \left\{x_1 \in \mathbb{R}^n : \exists u(.),\ x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right\}. \qquad \square$$

Definition 11.2 (Controllable subspace). Given two times $t_1 > t_0 \geq 0$, the *controllable* or *controllable-to-the-origin on* $[t_0, t_1]$ subspace $\mathcal{C}[t_0, t_1]$ consists of all states x_0 for which there exists an input $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^k$ that transfers the state from $x(t_0) = x_0$ to $x(t_1) = 0$; i.e.,

$$\mathcal{C}[t_0, t_1] := \left\{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u(.),\ 0 = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right\}. \qquad \square$$

The matrices $C(\cdot)$ and $D(\cdot)$ play no role in these definitions; therefore, one often simply talks about the reachable or controllable subspaces of the system

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^k, \qquad \text{(AB-CLTV)}$$

or of the pair $\big(A(\cdot), B(\cdot)\big)$.

Definition 12.1 (Reachable system). Given two times $t_1 > t_0 \geq 0$, the system (AB-LTV), or simply the pair $\big(A(\cdot), B(\cdot)\big)$, is *(completely state-) reachable on* $[t_0, t_1]$ if $\mathcal{R}[t_0, t_1] = \mathbb{R}^n$, i.e., if the origin can be transferred to every state. $\square$

Definition 12.2 (Controllable system). Given two times $t_1 > t_0 \geq 0$, the system (AB-LTV), or simply the pair $\big(A(\cdot), B(\cdot)\big)$, is *(completely state-) controllable on* $[t_0, t_1]$ if $\mathcal{C}[t_0, t_1] = \mathbb{R}^n$, i.e., if every state can be transferred to the origin. $\square$

Para determinar se um sistema é ou não alcançável (controlável) vale-se dos Gramianos.

Gramianos de alcançabilidade e controlabilidade

- Gramiano de alcançabilidade
  Dados dois tempos $t_1 > t_0 \geq 0$, o gramiano de alcançabilidade é definido como:

$$\mathcal{W}_R(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)B(\tau)^T\Phi(t_1, \tau)^T d\tau \qquad (64)$$

  Um sistema é alcançável se o posto do Gramiano de alcançabilidde for igual ao posto da matriz do sistema (A)

- Gramiano de controlabilidade
  Dados dois tempos $t_1 > t_0 \geq 0$, o gramiano de controlabilidade é definida por:

$$\mathcal{W}_C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B(\tau)^T\Phi(t_0, \tau)^T d\tau \qquad (65)$$

  Um sistema é controlável se o posto do Gramiano de controlabilidade for igual ao posto da matriz do sistema (A).

Observabillidade e Construtibilidade

Considere o seguinte conjunto de equações espaço de estados:

$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx$

No espaço de estados uma lei de controle utilizada é :

$u = -Kx$

Ou seja: Há que conhecer o vetor x

Mas somente o vetor y que não contém todos os termos de x é conhecido;

- É possível reconstruir o vetor x a partir da saída y?
- Se sim, em que condições?

Para elucidar estas e outras questões são definidos os conceitos de Observabilidade e Construtibilidade

Observabilidade (Observability) e Contrutibilidade (Constructibility)

- 1) *Observabilidade* se refere a determinação de $x(t_0)$ a partir das entradas u(t) e saídas y(t), $t \in [t_0, t_1]$.
- 2) *Construtibilidade* se refere a determinação de $x(t_1)$ a partir de entradas u(t) e saídas t(t) passadas, $t \in [t_0, t_1]$.

Observabilidade

We have seen in Lecture 5 that the system's state $x_0 := x(t_0)$ at time t_0 is related to its input and output on the interval $[t_0, t_1]$ by the variation of constants formula:

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t), \qquad \forall t \in [t_0, t_1], \tag{15.2}$$

where $\Phi(\cdot)$ denotes the system's state transition matrix. To study the system's observability, we need to determine under which conditions we can solve

$$\tilde{y}(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0, \qquad \forall t \in [t_0, t_1] \tag{15.3}$$

for the unknown $x_0 \in \mathbb{R}^n$, where

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau - D(t)u(t), \qquad \forall t \in [t_0, t_1].$$

OBSERVABILIDADE

Definition 15.1 (Unobservable subspace). Given two times $t_1 > t_0 \geq 0$, the *unobservable subspace on* $[t_0, t_1]$ $\mathcal{UO}[t_0, t_1]$ consists of all states $x_0 \in \mathbb{R}^n$ for which

$$C(t)\Phi(t, t_0)x_0 = 0, \qquad \forall t \in [t_0, t_1]. \qquad \square$$

Definition 15.2 (Observable system). Given two times $t_1 > t_0 \geq 0$, the system (CLTV) is *observable* if its unobservable subspace contains only the zero vector; i.e., $\mathcal{UO}[t_0, t_1] = 0$. $\square$

CONSTRUCTIBILIDADE

Definition 15.3 (Unconstructible subspace). Given two times $t_1 > t_0 \geq 0$, the *unconstructible subspace on* $[t_0, t_1]$ $\mathfrak{UC}[t_0, t_1]$ consists of all states x_1 for which

$$C(t)\Phi(t, t_1)x_1 = 0, \qquad \forall t \in [t_0, t_1]. \qquad \square$$

Definition 15.4 (Constructible system). Given two times $t_1 > t_0 \geq 0$, the system (CLTV) is *constructible* if its unconstructible subspace contains only the zero vector, i.e., $\mathfrak{UC}[t_0, t_1] = 0$. $\square$

Gramianos de Observabilidade e de Construtibilidade

– Gramiano de Observabilidade

Dados dois tempos $t_1 > t_0 \geq 0$, o gramiano de observabilidade é definido como

$$\mathcal{W}_O(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(\tau, t_0)^T C(\tau)^T C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau \qquad (73)$$

Um sistema é observável se e somente se o posto da matriz $\mathcal{W}_O(t_0, t_1)$ for igual ao posto da matriz do sistema (A).

– Gramiano de construtibilidade

Dados dois tempos $t_1 > t_0 \geq 0$, o gramiano de construtibilidade é definido como:

$$\mathcal{W}_{Cn}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(\tau, t_1)^T C(\tau)^T C(\tau) \Phi(\tau, t_1) d\tau \qquad (74)$$

Um sistema é observável se, e somente se, o posto da matriz $\mathcal{W}_{Cn}(t_0, t_1)$ for igual ao posto da matriz do sistema (A).

SISTEMAS LINEARES INVARIANTES COM O TEMPO

Considere o seguinte conjunto de equações:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$A \in \mathbb{R}^{kxk}, \quad B \in \mathbb{R}^{rx1}, \quad C \in \mathbb{R}^{1xk}$$

Para sistemas linares invariantes com o tempo pode-se provar que os conceitos de controlabilidade e de alcançabilidade se equivalem, e os conceitos de observabilidade e construtibilidade também se equivalem.

Também pode-se provar que, em vez de gramianos, pode-se utilizar a matriz de controlabilidade e de observabilidade para verificar se um sistema linear invariante com o tempo é controlável e observável.

SISTEMAS LINEARES INVARIANTES COM O TEMPO

Matriz de Controlabilidade

$$\mathfrak{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{k-1} \end{bmatrix}$$

Um sistema é controlável se e somente se o posto da matriz de controlabilidade C for igual a k.

Matriz de observabilidade

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ . \\ . \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}$$

Um sistema linear invariante com o tempo é observável se e somente se o posto de O^T for igual a k.

Matlab: ver as funções ctrb e obsv

Dualidade

Considere os seguintes sistemas lineares invariantes no tempo:
Sistema 1

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{75}$$

$$y = Cx \tag{76}$$

Sistema 2

$$\dot{\overline{x}} = A^T\overline{x} + C^T\overline{u} \tag{77}$$

$$\overline{y} = B^T\overline{x} \tag{78}$$

Admitindo que sejam dados dois tempos $t_1 > t_0 \geq 0$ pode-se provar que:

- O sistema 1 é controlável se e somente se o sistema 2 for observável em $[t_0, t_1]$
- O sistema 1 é observável em $[t_0, t_1]$ se e somente se o sistema 2 for controlável.

No caso de sistemas contínuos lineares e invariantes no tempo tem-se que as noções de observabilidade e construtibilidade se confundem e, desta forma, somente a observabilidade é analisada.

Como os sistema 1 e 2 são duais, pode-se construir a matriz de controlabilidade para o par (A^T, c^T) que resulta em:

$$\mathfrak{C} = \left[\begin{array}{ccccc} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & . & .(A^T)^{k-1]C^T} \end{array} \right] == \mathfrak{O}^T$$

onde $\mathfrak{O}^T$ é a matriz de observabilidade que é definida como:

$$\mathfrak{O} = \left[\begin{array}{c} C \\ CA \\ . \\ . \\ CA^{k-1} \end{array} \right]$$

Dualidade

No caso mais geral tem-se

- controlabilidade é dual de construtibilidade
- alcançabilidade é dual de observabilidade

Sistemas estabilizáveis e detectáveis

Estados não controláveis estáveis $\rightarrow$ sistema estabilizável

Estados não observáveis estáveis $\rightarrow$ sistema detectável

Se o sistema for estabilizável e/ou detectável, as variáveis que não são controláveis e/ou observáveis podem ser ignoradas no projeto

Determinação dos modos observáveis e não observáveis

Para determinar os modos controláveis e observáveis pode-se utilizar a *matriz de sensibilidade* que é definida para cada um dos casos como:

$\mathbf{S}(\lambda_i) = [A - \lambda_i I \quad B]$ e $\mathbf{S}(\lambda_i) = [A^T - \lambda_i I \quad C^T]$ onde λ_i é o auto-valor do sistema.

1. DUTTON, K.; THOMPSON, S. e BARRACLOUGH, B. The art of Control Engineering, Addison-Wesley,Harlow, 1998

Projeto de controle no espaço de estado quando há modos não controláveis e/ou não observáveis:
Calcular a função de transferência a partir das matrizes A, B, C e D e voltar novamente para o espaço de estado. Assim só terá modos controláveis e observáveis.