



Sistemas Inteligentes

UNIDADE 8 – Sistemas Fuzzy (Processo de Inferência)

Prof. Ivan Nunes da Silva



1. Introdução à Inferência Fuzzy

Aspectos relevantes

- Sistema de inferência fuzzy permite o tratamento e manipulação de informações incertas e imprecisas, as quais estão representadas por uma família de conjuntos fuzzy.
- Tais sistemas de inferência oferecem uma forma sistemática para a modelagem de sistemas, cujas informações a respeito dos mesmos são fornecidas de forma qualitativa.
- Frente a este contexto, a representação do sistema pode ser realizada por meio de variáveis linguísticas, as quais expressam o comportamento do sistema.
- Em suma, em várias situações, torna-se mais simples explicitarmos a dinâmica de um sistema por intermédio de sentenças dos seguintes tipos:
 - A “velocidade” é “alta”.
 - A “pressão” é “média”.
 - A “temperatura” é “pequena”.
 - A “corrente” é “muito baixa”.



2. Variáveis Linguísticas

Atributos de caracterização

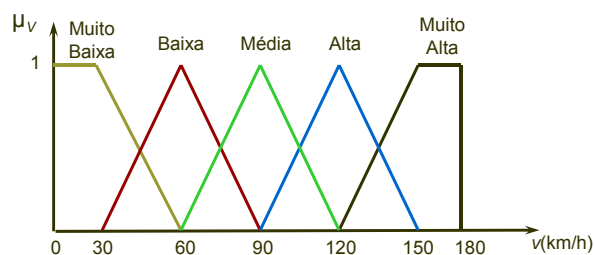
- **Variáveis linguísticas** são aquelas que permitem a descrição de informações que estão normalmente disponibilizadas de forma qualitativa.
- Estas são caracterizadas pelos seguintes atributos:
 - **Nome da variável (x)** → É o rótulo associado a uma variável linguística em específico.
 - **Conjunto de termos (T_x)** → São os nomes associados aos valores linguísticos da respectiva variável linguística.
 - **Universo de Discurso (U_x)** → É o domínio (espaço) em que cada variável linguística está definida.
 - **Funções de Pertinência (μ_x)** → São os conjuntos fuzzy que representam cada valor pertencente ao conjunto de termos da variável linguística.

3

2. Variáveis Linguísticas

Exemplo de especificação de atributos

- Seja a variável linguística representada por:



- Para o exemplo mostrado no gráfico, tem-se:
 - **Nome da variável** → $v = \{\text{velocidade}\}$.
 - **Conjunto de termos** → $T_v = \{\text{Muito Baixa, Baixa, Média, Alta, Muito Alta}\}$.
 - **Universo de Discurso** → $U_v \in [0;180]$
 - **Funções de Pertinência** → São dadas pelas funções triangulares e trapezoidais mostradas nos gráficos da figura.

4

3. Operações c/ Variáveis Linguísticas

Utilização de conectivos

- As principais operações entre variáveis linguísticas é realizada por meio da utilização dos conectivos “E”, “OU” e “NÃO”.
- De fato, os conectivos “E” e “OU” são empregados para compor os relacionamentos lógicos entre os termos das variáveis linguísticas. Como exemplo, tem-se:
 - Se velocidade é “alta” E aceleração é “média”
Então pressão no freio é “alta”.
 - Se velocidade é “média” OU aceleração é “alta”
Então pressão no freio é “média”.
- Esses conectivos “E” e “OU” são também definidos por meio de operadores de interseção (**T-norma**) e união (**S-norma**).

5

3. Operações c/ Variáveis Linguísticas

Especificação de conectivos

Operadores Para Conectivos “E” e “OU”

- O resultado da aplicação do conectivo “E” (ou “OU”), entre dois termos A e B de uma determinada variável linguística, ambos pertencentes ao mesmo universo de discurso, é formado por todos os valores de pertinência retornados a partir da aplicação do operador **T-norma** (ou **S-norma**) sobre $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$.
Formalmente, tem-se:

$$\mu_A(x) \text{ E } \mu_B(x) = \mu_A(x) \text{ T } \mu_B(x)$$

$$\mu_A(x) \text{ OU } \mu_B(x) = \mu_A(x) \text{ S } \mu_B(x)$$

- Utilizando para **T-norma** o operador “mínimo” e para **S-norma** o operador “máximo”, tem-se:

$$\mu_A(x) \text{ E } \mu_B(x) = \min\{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}$$

$$\mu_A(x) \text{ OU } \mu_B(x) = \max\{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}$$

Operadores Para Conectivo “NÃO”

- Para a operação de complemento {“NÃO”}, tem-se:

$$\text{NÃO}(\mu_A(x)) = 1 - \mu_A(x)$$

6

3. Operações c/ Variáveis Linguísticas

Exemplos de aplicação

Exemplo 1

- Para os termos A e B , definidos no universo de discurso $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, tem-se os seguintes graus de pertinência:

$$A = 0.1/-2 + 0.6/-1 + 0.4/0 + 0.3/1 + 0.9/2$$

$$B = 0.4/-2 + 0.3/-1 + 0.8/0 + 0.9/1 + 0.0/2$$

Utilizando-se os operadores "min" e "max", calcule as seguintes operações:

a) $\mu_A(x)$ **E** $\mu_B(x) = 0.1/-2 + 0.3/-1 + 0.4/0 + 0.3/1 + 0.0/2$

b) $\mu_A(x)$ **OU** $\mu_B(x) = 0.4/-2 + 0.6/-1 + 0.8/0 + 0.9/1 + 0.9/2$

c) **NÃO**($\mu_A(x)$) = $0.9/-2 + 0.4/-1 + 0.6/0 + 0.7/1 + 0.1/2$

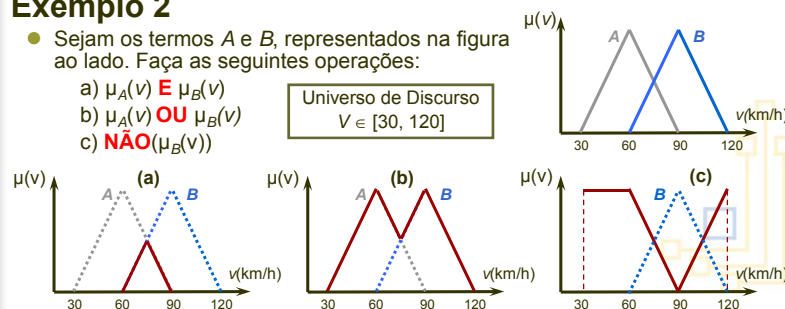
Exemplo 2

- Sejam os termos A e B , representados na figura ao lado. Faça as seguintes operações:

a) $\mu_A(v)$ **E** $\mu_B(v)$

b) $\mu_A(v)$ **OU** $\mu_B(v)$

c) **NÃO**($\mu_B(v)$)



4. Aspectos de Relações Fuzzy

Conceitos introdutórios

- Uma relação matemática indica como estão associados os elementos de um conjunto em relação aos elementos de um outro conjunto.
- Nas relações fuzzy, o nível de associação entre dois conjuntos fuzzy é também fornecida por meio de graus de pertinência que possuem valores entre 0 e 1.
- Assim, este relacionamento podem ser definidos no subespaço constituído pelo produto cartesiano dos respectivos elementos dos universos de discurso, os quais são representados por:

$$R(x, y) = \sum_{(x, y) \in X \times Y} \mu_R(x, y)/(x, y)$$

Exemplo: Seja a relação fuzzy definida pela regra "x está em torno de y", onde $x \in X$ e $y \in Y$, cujos universos de discurso discretos são especificados por $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Esboçar a forma de representação matricial desta relação.

$$R(x, y) = 0.8/(x_1, y_1) + 0.3/(x_1, y_2) + 0.7/(x_1, y_3) + 0.4/(x_2, y_1) + 0.9/(x_2, y_2) + 0.6/(x_2, y_3) + 0.1/(x_3, y_1) + 1.0/(x_3, y_2) + 0.4/(x_3, y_3) \Rightarrow R(x, y) = \begin{matrix} x_1 & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.7 \\ 0.4 & 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 1.0 & 0.4 \end{bmatrix} \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}$$

4. Aspectos de Relações Fuzzy

Composição de relações fuzzy

- A combinação de duas ou mais relações fuzzy, definidas em espaços distintos (produtos cartesianos diferentes), pode ser feita por meio de operadores que permitem a composição das respectivas relações.
- Deve-se ressaltar que a composição de relações fuzzy possui um papel fundamental nos procedimentos envolvendo computação baseada em regras fuzzy e, principalmente, nos processos de implementação de estimadores e controladores fuzzy.
- A principal técnica de composição de relações fuzzy é conhecida como “Composição Max-Min”



9

4. Aspectos de Relações Fuzzy

Composição Max-Min

- Sejam duas relações fuzzy $R(x,y)$ e $S(y,z)$, definidas respectivamente nos produtos cartesianos discretos $X_x Y$ e $Y_x Z$. A composição do tipo Max-Min efetuada sobre as matrizes representando $R(x,y)$ e $S(y,z)$ é definida por:

$$R \circ S(x, z) = \max_{y \in Y} \{ \min \{ \mu_R(x, y), \mu_S(y, z) \} \}$$

onde a matriz resultante $R \circ S$ está agora definida no produto cartesiano $X_x Z$.

- Como exemplo, sejam as relações fuzzy $R(x,y)$ e $S(y,z)$, definidas respectivamente em $X_x Y$ e $Y_x Z$, representadas pelas seguintes matrizes:

$$R(x,y) = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \\ x_2 & \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.3 \end{bmatrix} \\ x_3 & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$S(y,z) = \begin{matrix} & z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \\ y_2 & \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \\ y_3 & \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.7 \end{bmatrix} \\ y_4 & \begin{bmatrix} 0.9 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

10

4. Aspectos de Relações Fuzzy

Resultado da aplicação da composição Max-Min

- A matriz representando a composição Max-Min de $R(x,y)$ e $S(y,z)$ é definida pelos seguintes elementos:

$$R \circ S(x,z) = \begin{matrix} & \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mu_{R \circ S}(x_1, z_1) & \mu_{R \circ S}(x_1, z_2) & \mu_{R \circ S}(x_1, z_3) \\ \mu_{R \circ S}(x_2, z_1) & \mu_{R \circ S}(x_2, z_2) & \mu_{R \circ S}(x_2, z_3) \\ \mu_{R \circ S}(x_3, z_1) & \mu_{R \circ S}(x_3, z_2) & \mu_{R \circ S}(x_3, z_3) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- Aplicando a regra de composição Max-Min, obtêm-se os elementos da matriz $R \circ S(x,z)$, dados por:

$$\mu_{R \circ S}(x_1, z_1) = \max\{\min\{0.1, 0.2\}; \min\{0.6, 0.4\}; \min\{0.4, 1.0\}; \min\{0.9, 0.9\}\} = 0.9$$

$$\mu_{R \circ S}(x_1, z_2) = \max\{\min\{0.1, 0.8\}; \min\{0.6, 0.3\}; \min\{0.4, 0.0\}; \min\{0.9, 0.7\}\} = 0.7$$

$$\mu_{R \circ S}(x_1, z_3) = \max\{\min\{0.1, 0.6\}; \min\{0.6, 0.1\}; \min\{0.4, 0.7\}; \min\{0.9, 0.2\}\} = 0.4$$

- De maneira similar, obter-se-iam os demais elementos, dados por:

$$\mu_{R \circ S}(x_2, z_1) = 0.8 ; \quad \mu_{R \circ S}(x_2, z_2) = 0.8 ; \quad \mu_{R \circ S}(x_2, z_3) = 0.7$$

$$\mu_{R \circ S}(x_3, z_1) = 0.4 ; \quad \mu_{R \circ S}(x_3, z_2) = 0.5 ; \quad \mu_{R \circ S}(x_3, z_3) = 0.5$$

11

5. Processo de Inferência Fuzzy

Aspectos introdutórios

- O processo de inferência fuzzy, também conhecido como raciocínio aproximado, permite mapear o conhecimento de um sistema por meio de regras fuzzy do tipo “Se-então”.
- Mediante a análise de um conjunto finito dessas regras, pode-se então determinar, por meio do processo de inferência, o comportamento das variáveis de saída do sistema a ser mapeado.
- Assim, as regras associadas ao processo de inferência fuzzy possuem a seguinte forma:

Se <condição>
então <ação>

- Normalmente, os processos de inferência fuzzy são baseados na regra de **Modus Ponens** generalizado, que é explicitado por:

Fato: x é A'

Regra: **Se** x é A **então** y é B

Consequência: y é B'

12

5. Processo de Inferência Fuzzy

Interpretação da regra de Modus Ponens (I)

- Seja então a regra de *Modus Ponens* generalizada explicitada por:

Fato: x é A'

Regra: Se x é A então y é B

Consequência: y é B'

- Sua interpretação pode ser formulada da seguinte maneira:
 - O fato observado A' é um sinal medido que é assumido ser verdadeiro.
 - Se o sinal medido A' é assumido como verdadeiro, então o antecedente " x é A " da referida regra que foi ativada é também verdadeiro.
 - Se o antecedente " x é A " é verdadeiro e sabendo-se que " x é A " implica no consequente " y é B ", então este consequente é também verdadeiro.
 - Se o consequente " y é B " é verdadeiro, então é bem verdade que o resultado final da implicação é que realmente y é B' , em que B' é o valor de saída.

13

5. Processo de Inferência Fuzzy

Interpretação da regra de Modus Ponens (II)

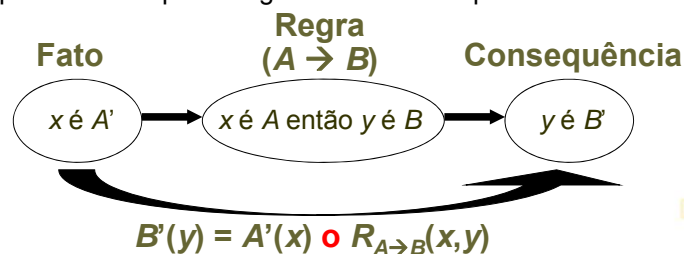
- Em suma, o conjunto de "fato", "regra" e "consequência":

Fato: x é A'

Regra: Se x é A então y é B

Consequência: y é B'

pode ser interpretado geometricamente por:



Onde: " \circ " indica uma operação de composição Max-Min, e $R_{A \rightarrow B}$ é uma função de implicação.

14

5. Processo de Inferência Fuzzy

Principais operadores de implicação

- A obtenção da função de pertinência relativa à implicação $R_{A \rightarrow B}$ pode ser computada utilizando os próprios valores de pertinência associados às variáveis A e B .
- Assim, sejam duas variáveis linguísticas x e y , com termos tendo valores A e B , respectivamente. A função de pertinência de $\mu_{R_{A \rightarrow B}}$ pode ser obtida por meio dos seguintes operadores:

$$\text{MAMDANI} \Rightarrow \mu_{R_{A \rightarrow B}}(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$$

Também conhecido como operador "min" de Mamdani.

$$\text{ZADEH} \Rightarrow \mu_{R_{A \rightarrow B}}(x, y) = \max\{1 - \mu_A(x), \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\}$$

Também conhecido como operador "max-min" de Zadeh.

$$\text{LARSEN} \Rightarrow \mu_{R_{A \rightarrow B}}(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$$

Também conhecido como operador "produto" de Larsen.

$$\text{ARITMÉTICO} \Rightarrow \mu_{R_{A \rightarrow B}}(x, y) = \min\{1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)\}$$

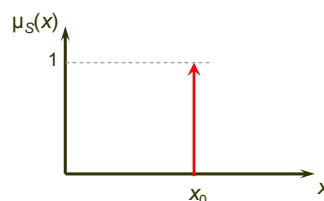
$$\text{BOOLEANO} \Rightarrow \mu_{R_{A \rightarrow B}}(x, y) = \max\{1 - \mu_A(x), \mu_B(y)\}$$

15

5. Processo de Inferência Fuzzy

Conceito de Singleton

- Um "Singleton" é um caso particular de conjunto fuzzy normalizado, cujo domínio é um único ponto x_0 (número crisp), pertencente a X , com $\mu(x_0) = 1$.
- São especialmente utilizados para mapear os sinais de entrada do sistema fuzzy, os quais são geralmente representados por valores pontuais advindos do meio externo.
 - Exemplos: valores pontuais de temperatura, velocidade, corrente elétrica, vazão, pressão, etc.
- De fato, o valor medido é considerado como sendo verdadeiro, estando, assim, totalmente incluído dentro do conjunto fuzzy associado com a sua respectiva variável.
- Portanto, um conjunto fuzzy "Singleton" S , associado ao ponto x_0 , pode ser representado por:



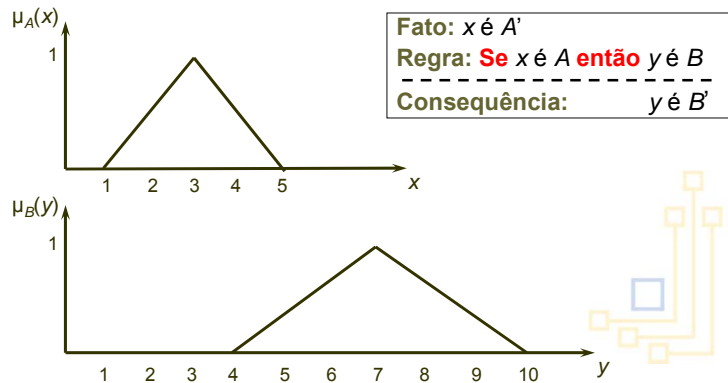
$$\mu_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = x_0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

16

6. Exemplo de Inferência Fuzzy

Definição de variáveis

- Sejam os conjuntos A e B , definidos respectivamente nos universos de discurso $X = \{2, 3, 4\}$ e $Y = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, os quais são representados pelos gráficos a seguir.
- Utilizando o operador de implicação de **Mamdani**, assim como a regra de composição **Max-Min**, calcule então o valor do conjunto fuzzy de saída B' inferido a partir de um sinal A' igual a 4.

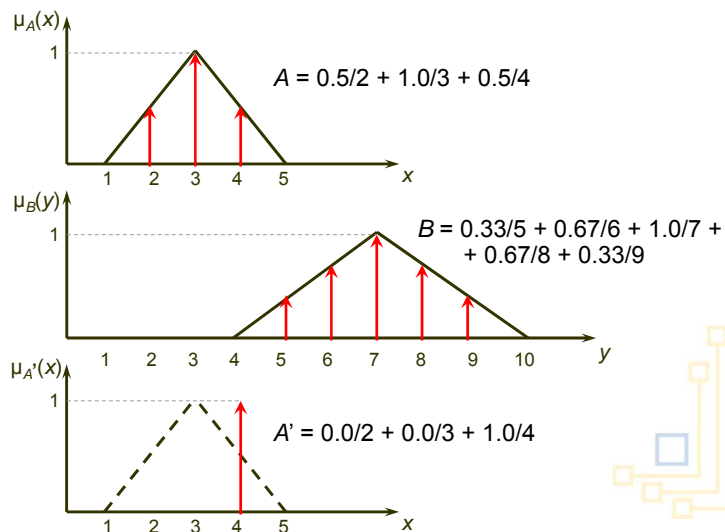


17

6. Exemplo de Inferência Fuzzy

Discretização de variáveis

- Utilizando a representação discreta para todas as variáveis, tem-se:



18

6. Exemplo de Inferência Fuzzy

Obtenção de valores da implicação

- Obtendo o valor de $\mu_{R_{A \rightarrow B}}(x,y)$

$$\mu_{R_{A \rightarrow B}}(x,y) = 0.33/(2,5) + 0.50/(2,6) + 0.50/(2,7) + 0.50/(2,8) + 0.33/(2,9) + \\ + 0.33/(3,5) + 0.67/(3,6) + 1.00/(3,7) + 0.67/(3,8) + 0.33/(3,9) + \\ + 0.33/(4,5) + 0.50/(4,6) + 0.50/(4,7) + 0.50/(4,8) + 0.33/(4,9)$$

- Obtendo o valor de $B'(y) \rightarrow B'(y) = A'(x) \circ R_{A \rightarrow B}(x,y)$

$$B'(y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.33 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.33 \\ 0.33 & 0.67 & 1.00 & 0.67 & 0.33 \\ 0.33 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.33 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mu_{B'}(5) = \max\{\min\{0,0.33\}; \min\{0,0.33\}; \min\{1,0.33\}\} = 0.33$$

$$\mu_{B'}(6) = \max\{\min\{0,0.50\}; \min\{0,0.67\}; \min\{1,0.50\}\} = 0.50$$

$$\mu_{B'}(7) = \max\{\min\{0,0.50\}; \min\{0,1.00\}; \min\{1,0.50\}\} = 0.50$$

$$\mu_{B'}(8) = \max\{\min\{0,0.50\}; \min\{0,0.67\}; \min\{1,0.50\}\} = 0.50$$

$$\mu_{B'}(9) = \max\{\min\{0,0.33\}; \min\{0,0.33\}; \min\{1,0.33\}\} = 0.33$$

19

6. Exemplo de Inferência Fuzzy

Representação gráfica do resultado da inferência

- A partir dos valores obtidos para B' , tem-se a representação gráfica de sua saída, ou seja:

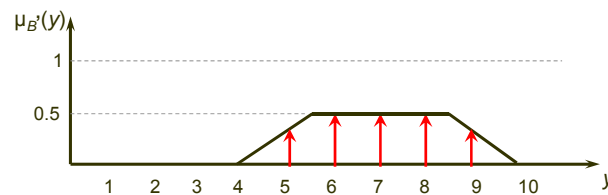
$$\mu_{B'}(5) = \max\{\min\{0,0.33\}; \min\{0,0.33\}; \min\{1,0.33\}\} = 0.33$$

$$\mu_{B'}(6) = \max\{\min\{0,0.50\}; \min\{0,0.67\}; \min\{1,0.50\}\} = 0.50$$

$$\mu_{B'}(7) = \max\{\min\{0,0.50\}; \min\{0,1.00\}; \min\{1,0.50\}\} = 0.50$$

$$\mu_{B'}(8) = \max\{\min\{0,0.50\}; \min\{0,0.67\}; \min\{1,0.50\}\} = 0.50$$

$$\mu_{B'}(9) = \max\{\min\{0,0.33\}; \min\{0,0.33\}; \min\{1,0.33\}\} = 0.33$$

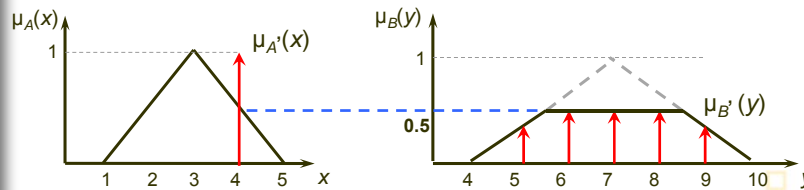


20

6. Exemplo de Inferência Fuzzy

Interpretação geométrica

- Quando muitos pontos de discretização são utilizados no processo de inferência, tem-se então um elevado esforço computacional para a obtenção da saída.
- A fim de evitar este elevado esforço computacional, o resultado da implicação de Mamdani pode ser também alcançado a partir de sua interpretação geométrica.



- Passos para obter $B'(y)$:
 1. Assim, para obter o valor de B' , basta-se então verificar o grau de pertinência ativado por A' frente ao conjunto A .
 2. Em seguida, o resultado de $B'(y)$ será a respectiva região fuzzy obtida pelo corte no conjunto B frente àquele valor de pertinência obtido no passo anterior.

21

Fim da Apresentação



22