

Referenciais não inerciais

(MARION, cap 10)

①

⇒ aqueles p/ os quais NÃO valem as leis de Newton 😞 !!

considero que meu sistema de referência é meu zozão, meu vetor posição \vec{r} pode ser escrito em rel. a um sistema fixo

como

$$\vec{r}_I = \vec{R} + \vec{r}'$$

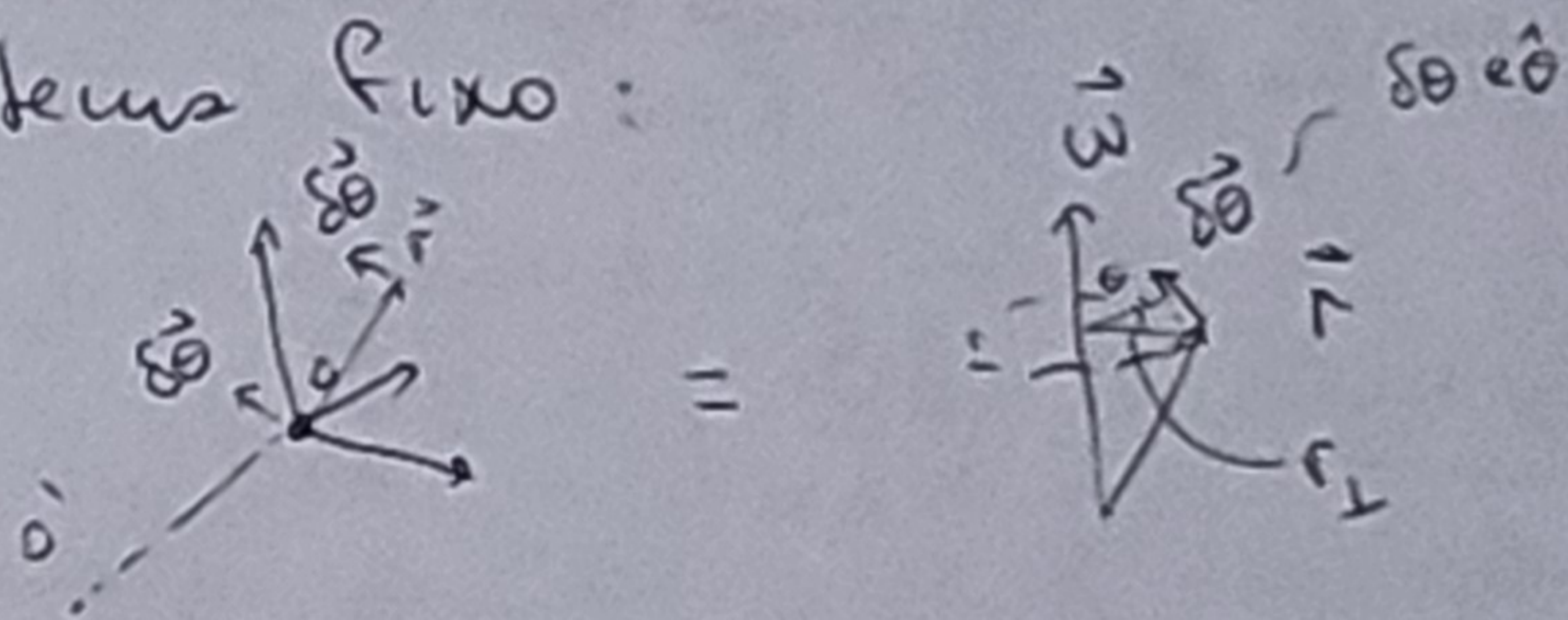
o que eu vejo
(origem do)
meu sistema

↳ aqui valem as leis (!)

Se o sistema \vec{R} estiver \leftarrow girando, mesmo que \vec{R} seja fixo \leftarrow eixos girando
 ele irá rodar em relação ao sistema fixo:

↳ variação é $\delta\theta \hat{e}_\theta \perp$

que é dada por $(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \delta t$



ou seja:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)' = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

no sistema fixo
vetor posição no sistema girante
rotação do sistema girante em rel. ao fixo

Se, além disso, \vec{r} varia no sistema \vec{R} , temos:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)' = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

velocidade (variação de vetor) em rel. ao sistema não inercial
tipo: radial + tangencial
→ é o que vejo "de fora"

Note: vale p/ qualquer vetor " \vec{r} ", e posso adicionar tb possíveis variáveis de \vec{R} independentemente da rotação $\vec{\omega}$

(Marion)
cap 10

$$\vec{v}_f = \vec{V} + \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

vel. em rel. ao sistema fixo
vel. de origem de \vec{R} (velocidade linear, além de rotação dos eixos)

Em termos da 2ª lei de Newton:

$$\vec{F} = m \vec{a}_F = m \frac{d\vec{v}_F}{dt} = m \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)' + m \left(\frac{d\vec{v}_R}{dt} \right)' + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)'$$

↳ pro sistema fixo (inercial) termo em conta a variação do movimento de \vec{R} Sistemas escrotos, como acuraz

⇒ Só preciso tomar cuidado c/ a rotação dos sistemas em movimento, pois implica variação dos eixos

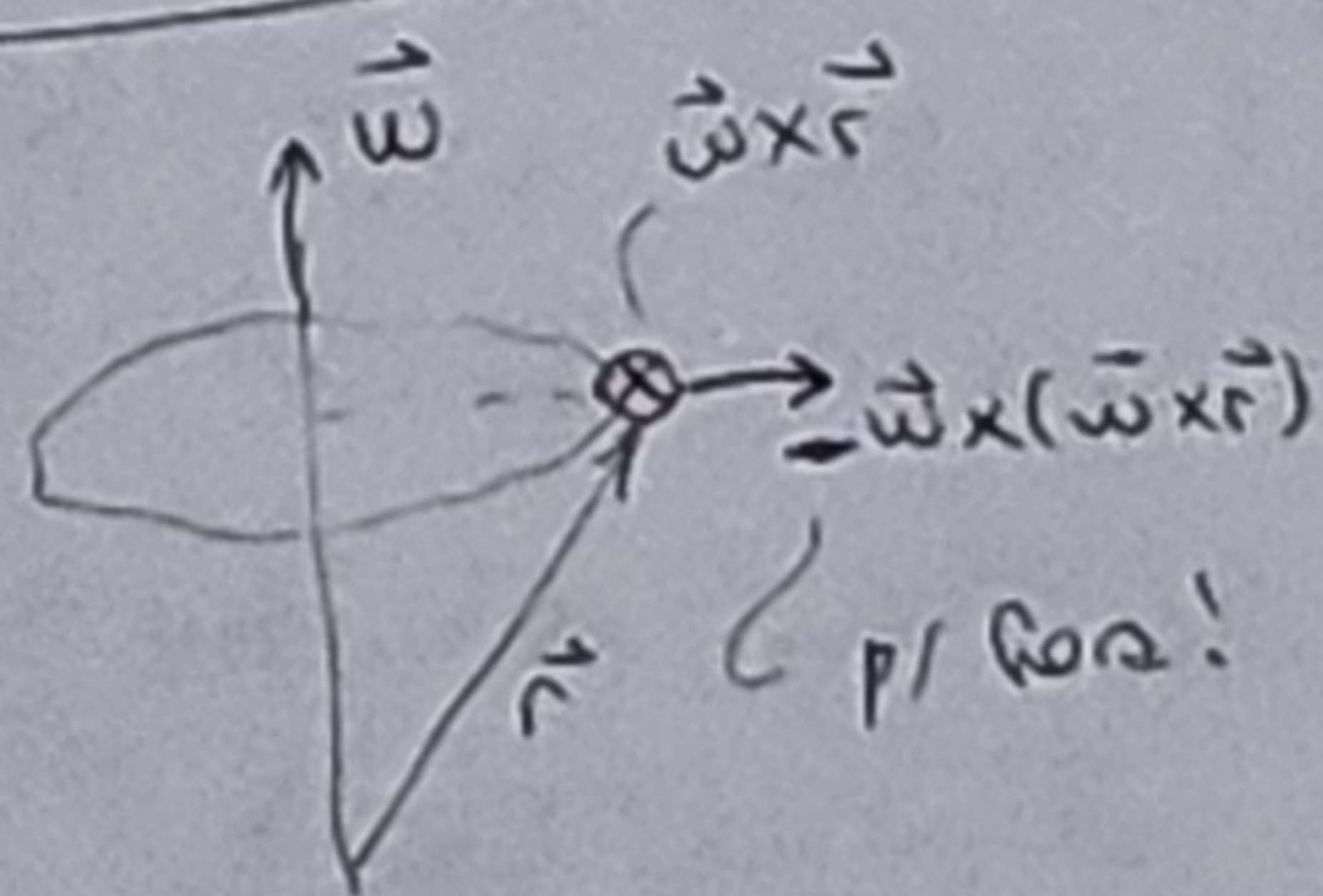
ou seja: $\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)' = \frac{d}{dt} \left(\sum x_i \hat{e}_i \right) = \sum \dot{x}_i \hat{e}_i + \sum x_i \dot{\hat{e}}_i$

$\left[\vec{r} = \sum x_i \hat{e}_i \right]$ no sistema \hat{R} ⇒ aqui tem que se $\hat{R} = 0$ ou não! $\vec{\omega} \times \vec{r} = \sum x_i (\vec{\omega} \times \hat{e}_i) = \sum x_i \dot{\hat{e}}_i$
 $= d\vec{r}/dt$ no sistema \hat{R}

Por tanto: $\left(\frac{d\vec{v}_R}{dt} \right)' = \left(\frac{d\vec{v}_R}{dt} \right)_{\text{sist. girante}} + \vec{\omega} \times \vec{v}_R = \vec{a}_R + \vec{\omega} \times \vec{v}_R$

e: $\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)' = \vec{\omega} \times \vec{v}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

⇒ No meu sistema: $\vec{F}_{\text{efetiva}} = \vec{F} - m \ddot{\vec{R}} - m \vec{\omega} \times \vec{r} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m (\vec{\omega} \times \vec{v}_R)$
 (não inercial) = $m \vec{a}_R$ acel. do sistema força centrífuga forças de Coriolis



Se eu estou em sistema girante e ã sei, vou achar que há uma força centrífuga contrária à F_{op} que me faz rodar em rel. ao sist. fixo → faz sentido! se o ônibus para abrupt/ sinto "força" p/ frente, contrária a $m\ddot{R}$ → empurrão

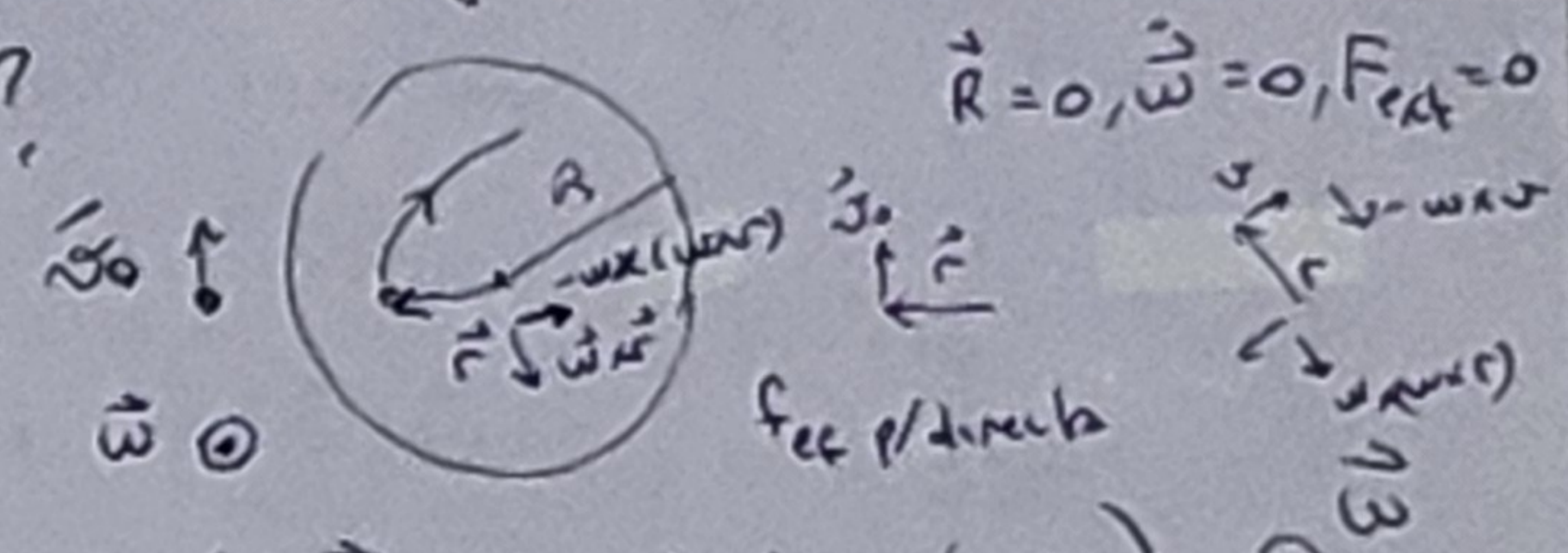
"forças fictícias" e.g.: p/ entender p/ que ficou parado quando sei que há uma força externa centrípeta devo imaginar uma força centrífuga que a compense, etc.

Coriolis: note que aparece além da centrífuga, se o ponto estiver se movendo no sistema girante, i.e. se $\vec{v}_R \neq 0$

Exemplos: Mesa sem atrito sobre carrissel girando c/ $\vec{\omega}$ const. (2)

Como explicar movimento do puck?

tenho: $\vec{F}_{eff} = m\vec{a}_r = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$



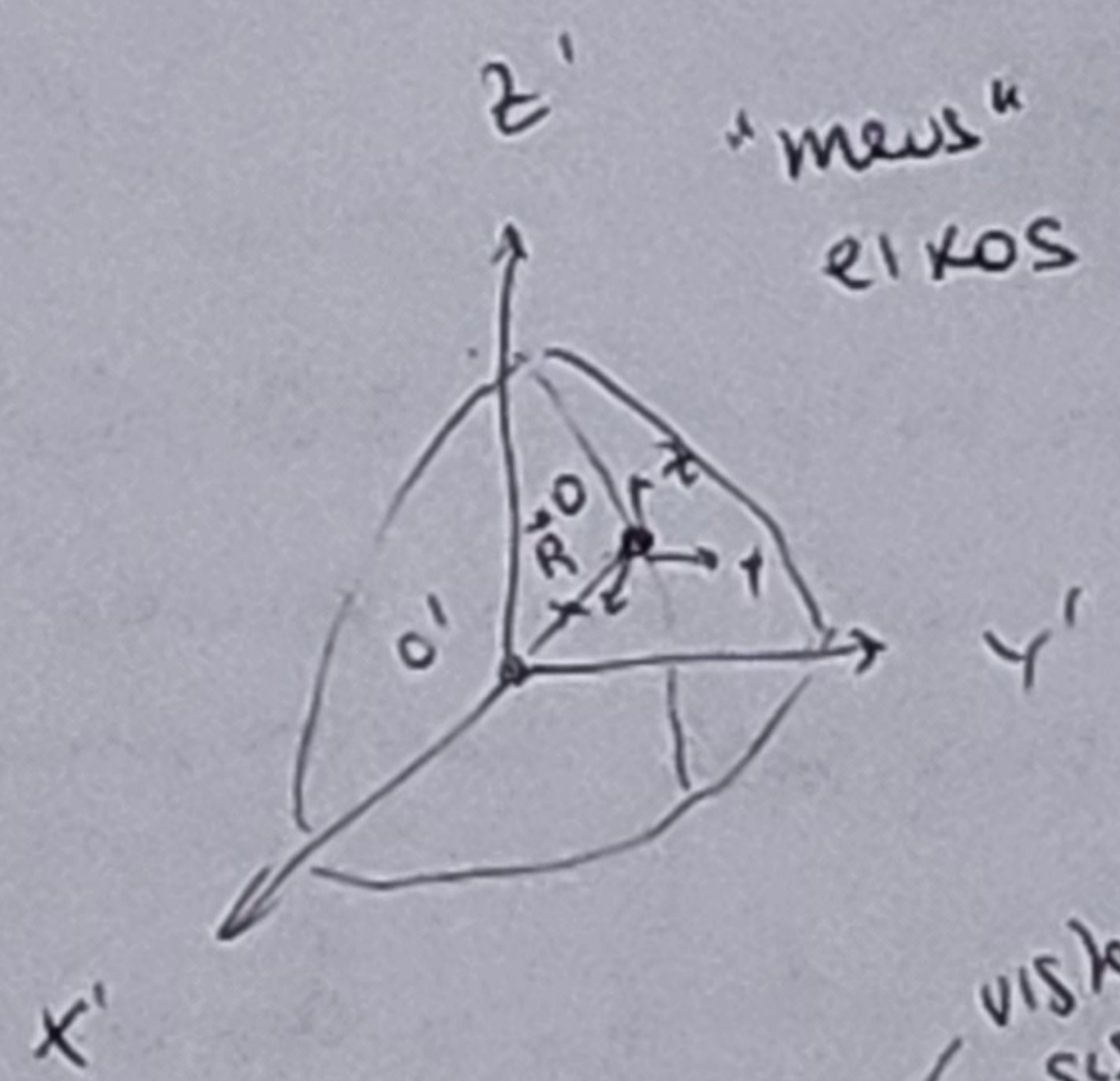
[os outros termos são zero, em particular $\vec{R}=0, \vec{\omega}=0$] a única int. externa é $\vec{\omega}$ (ant. horário) \odot

Podemos integrar: $\vec{v}_{ef} = \vec{v}_r = \int \vec{a}_{ef} dt$ e depois $\vec{r} = \int \vec{v}_r dt$

pr ter a trajetória vista sobre o carrissel, e.g. numericamente (ver Marion ex. 10.2) dependendo de \vec{v}_0, R e ω ambas forças começam \Rightarrow p/direita e depois vai virar, dando "desenhos" diversos

Efeito da Rotação da Terra

Quais serão as forças fictícias na superfície devido a $\vec{\omega}$ da Terra?



pr O' temos: $\vec{F} = \vec{S} + m\vec{g}_0$
 ← forças externas, e.g. Sol

podemos super ~ 0 pr a Terra
 visto do sist. fixo

em O: $\vec{F}_{efetiva} = \vec{S} + m\vec{g}_0 - m\ddot{\vec{R}} - m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$

como acima: $\ddot{\vec{R}} = \left(\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right)' = \frac{d\vec{R}}{dt} \Big|_{emo} + \vec{\omega} \times (\vec{R}/dt)' = \vec{\omega} \times \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$

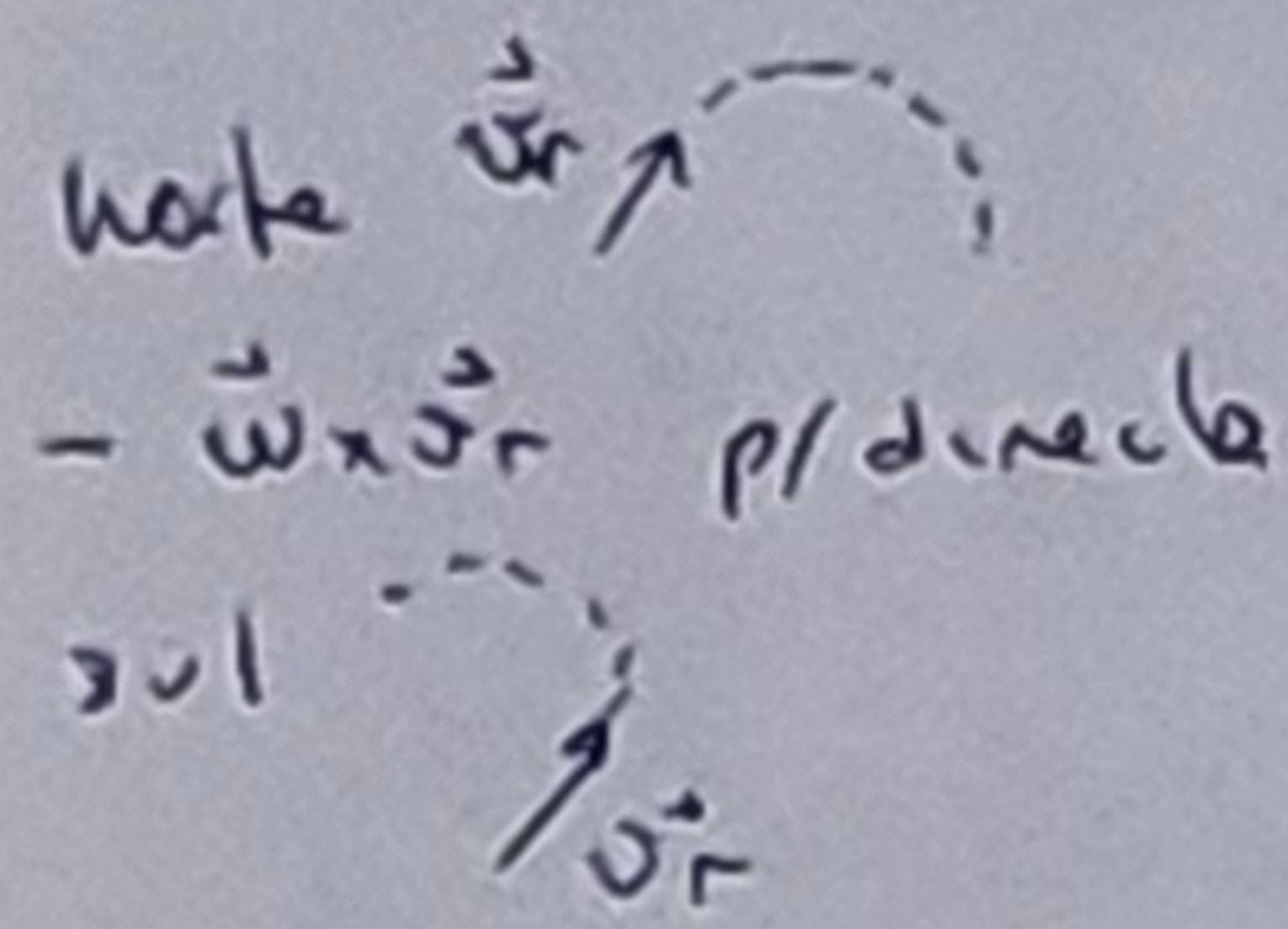
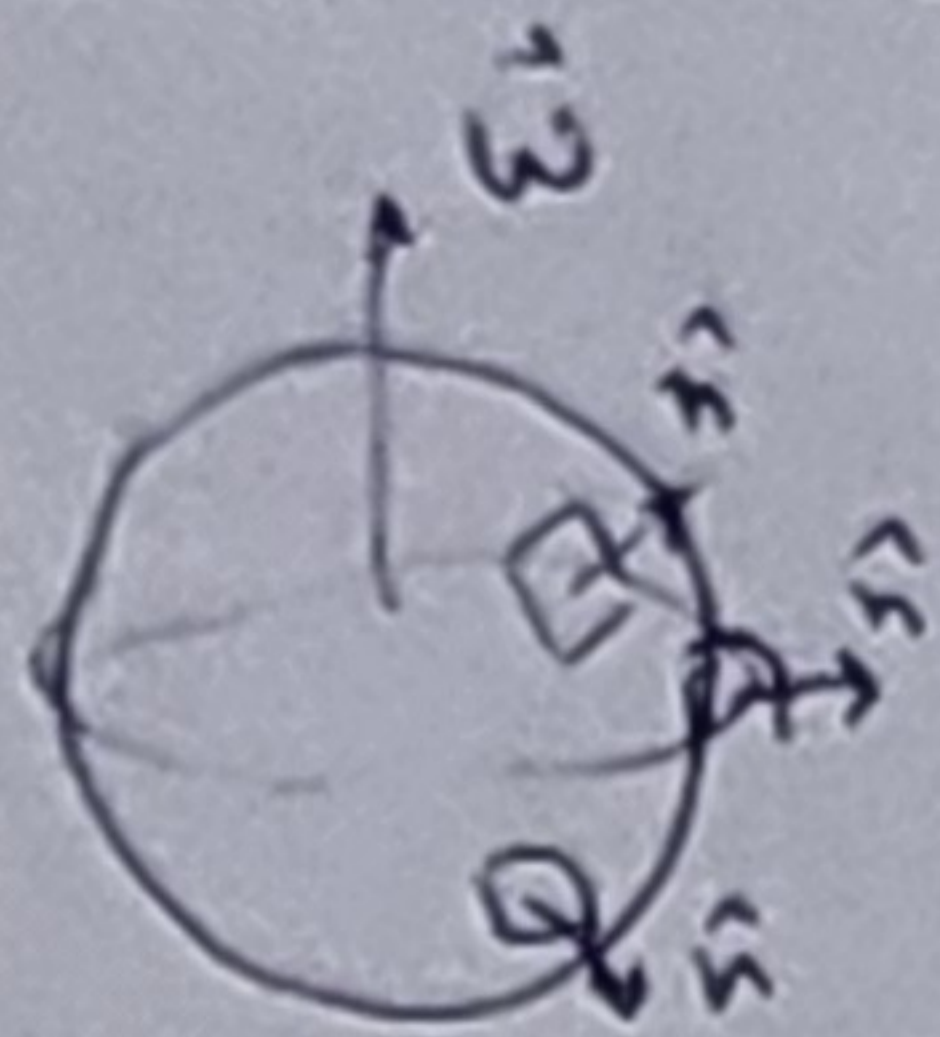
\vec{R} é fixo em rel. a O $\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)' = \vec{R} \times \vec{\omega}$ \vec{g} efetivo, medido por mim: $\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{R}))$

$\Rightarrow \vec{F}_{ef} = \vec{S} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$

* verifique!
 → implica desvio de Terra!

Efeitos das forças de Coriolis sentidos no movimento de fluidos e.g. diferenças pr hemisfério Sul e Norte! \odot

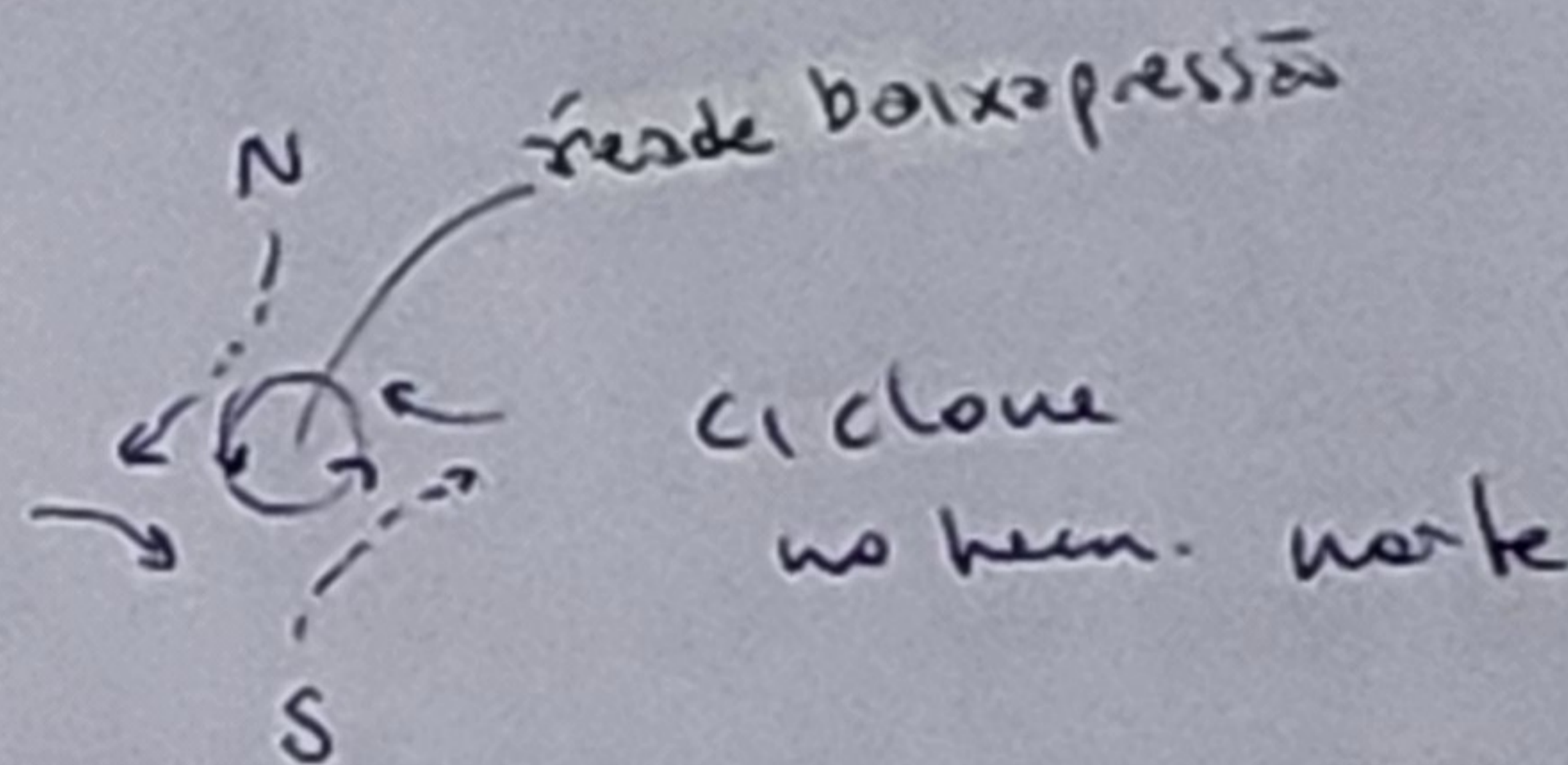
Força de Coriolis: $-2m \vec{\omega} \times \vec{v}_r$



vai depender da projeção de $\vec{\omega}$ na vertical local do ponto considerado (pois é o que contribui p/ prod. vet. com \vec{v}_r no plano local) $(\vec{\omega} \cdot \hat{n}) \hat{n}$ é p/ fora no hem. norte, é zero no eq. e é p/ dentro no hem. sul, portanto: aceleração de Coriolis será à direita de \vec{v}_r no hem. norte e à esquerda no hem. sul

Até as massas de ar:

(outros exemplos tb, e.g. projéteis, ver explicações em Marion, sec 10.4)

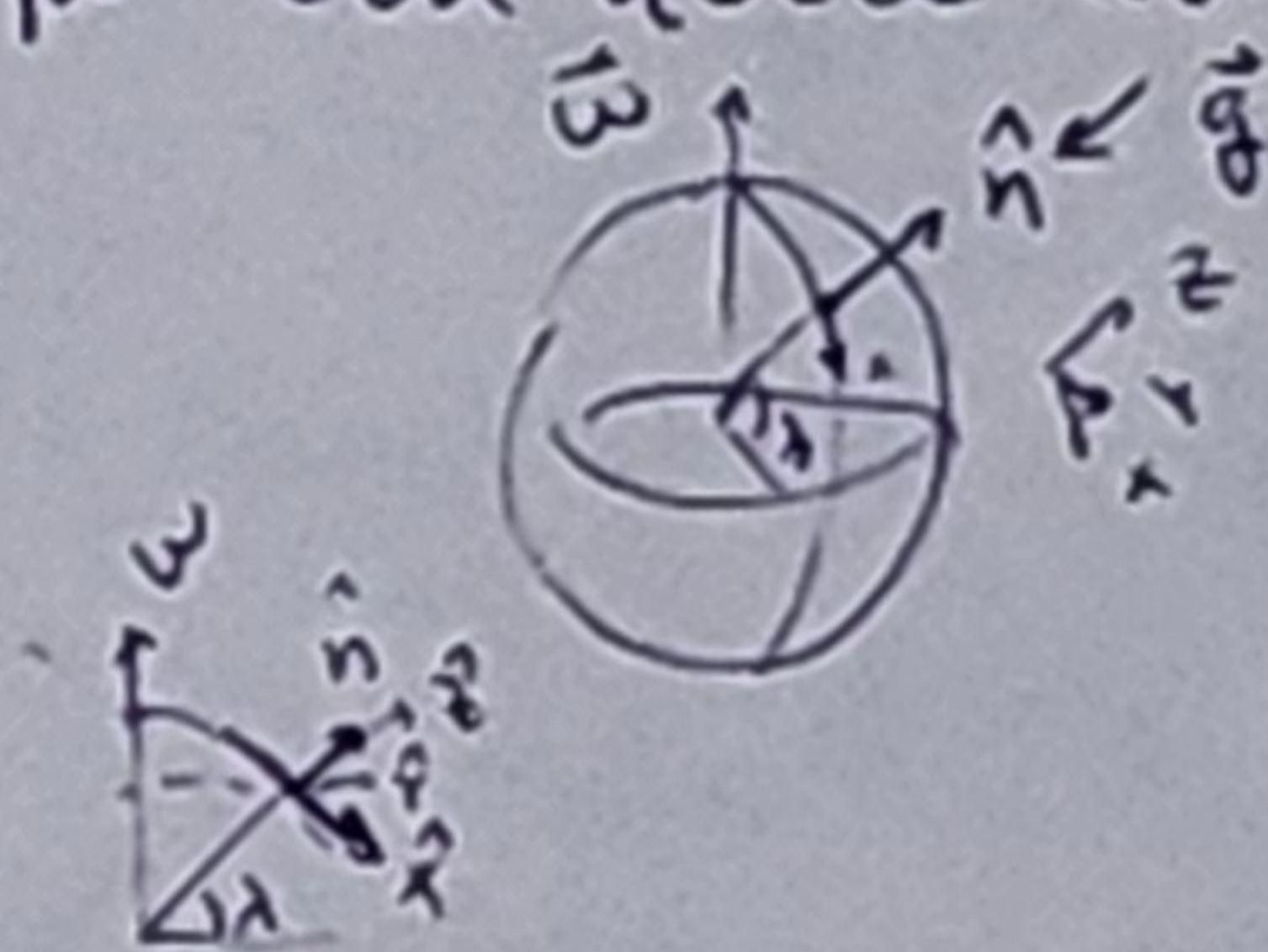


ciclone no hem. norte

Ex. deflexão em rel. à vertical p/ corpo em queda livre a partir de h

$$\vec{F}_{ef} = m \vec{a}_r = m (\vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r)$$

Suponha radial



$$\begin{aligned} \omega_z &= \omega \sin \lambda \\ \omega_y &= 0 \\ \omega_x &= -\omega \cos \lambda \end{aligned}$$

p/ o sistema local: $\vec{v}_r = -gt \hat{z}$
(x, y, z)

afetada por $-2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ vai criar x e y mas vamos desprezar pois será muito menores do que z

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\omega \cos \lambda & 0 & \omega \sin \lambda \\ 0 & 0 & -gt \end{vmatrix} = -(\omega g t \cos \lambda) \hat{y} \rightarrow \begin{cases} \vec{a}_r = +2 \omega g t \cos \lambda \hat{y} \\ -g \hat{z} \end{cases}$$

note aqui n-hat olha só p/ ω · n-hat porque v-r não está no plano

integrando:

$$\begin{cases} y(t) = \frac{\omega g t^3 \cos \lambda}{3} \Rightarrow \text{deflexão!} \\ z(t) = h - g t^2 / 2 \Rightarrow \text{movim usual de queda livre} \end{cases}$$

tempo de queda: $t = \sqrt{2h/g}$

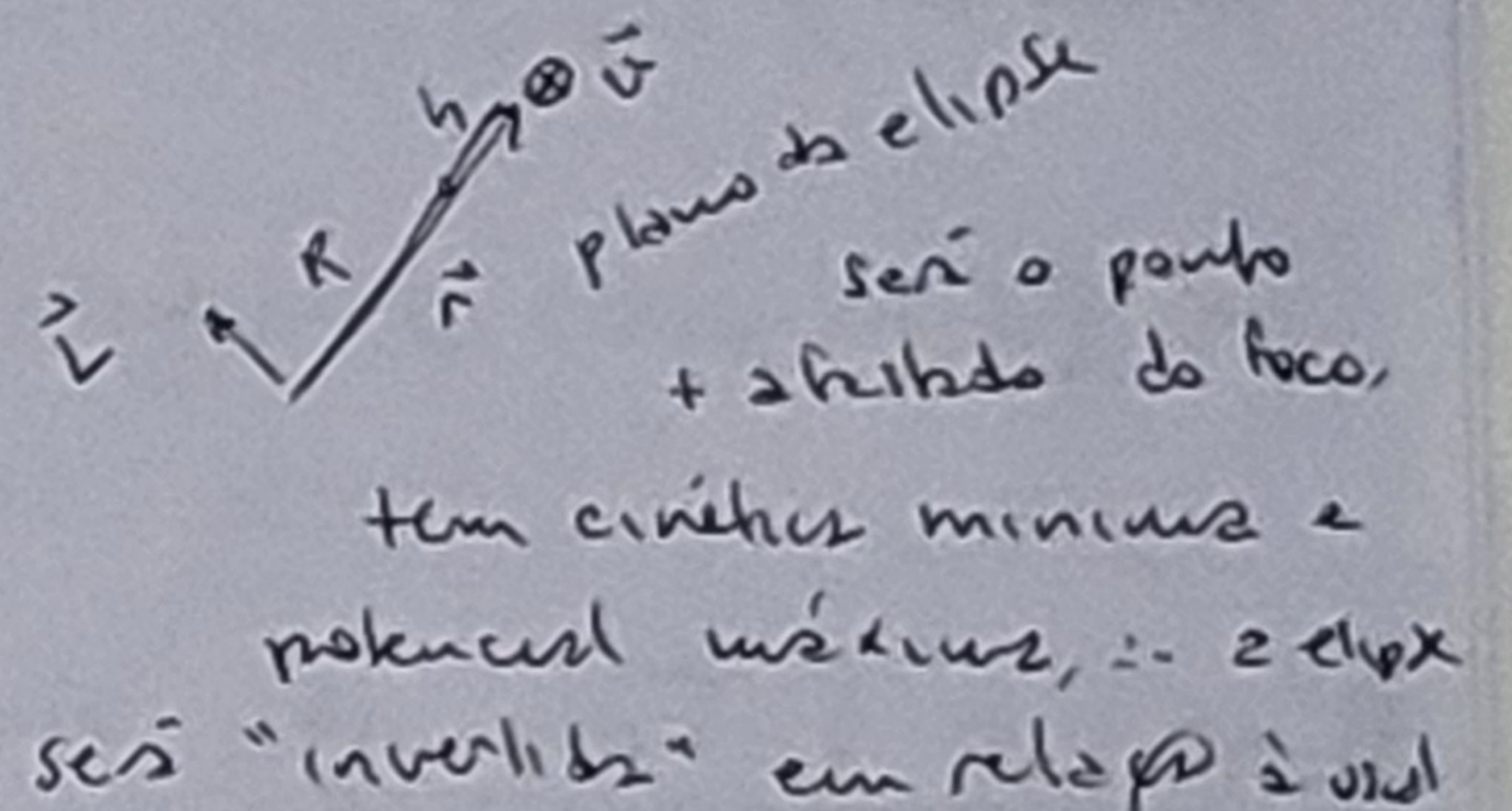
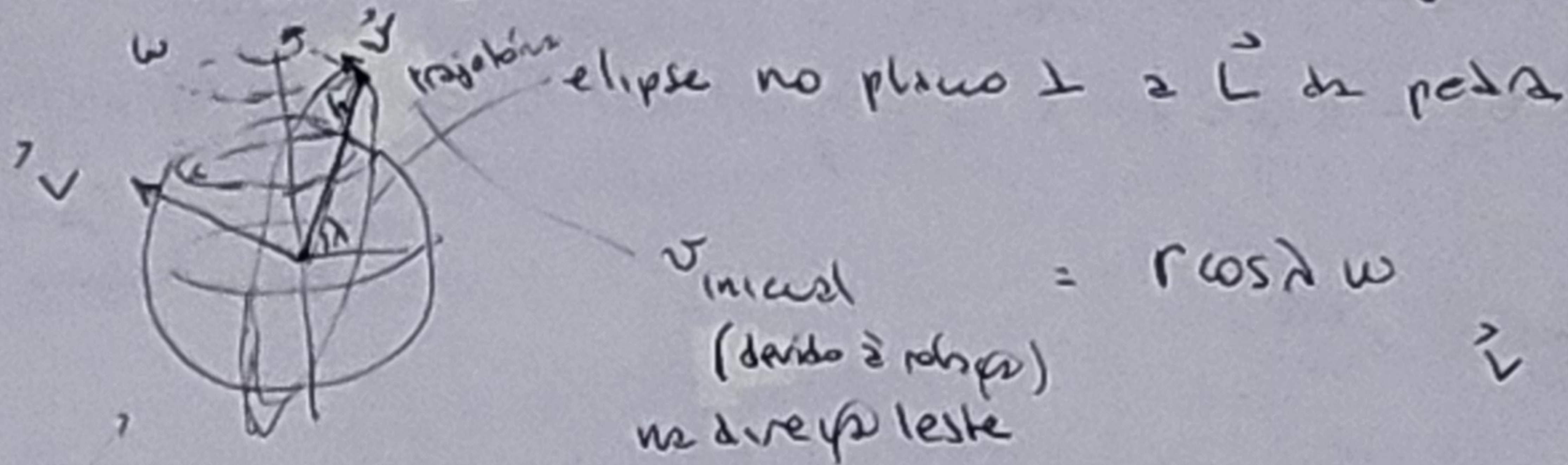
∴ deflexão $d = \frac{\omega}{3} \sqrt{8h^3/g} \cos \lambda$

cair 100 m em lab bud 45° de d ~ 1.55 cm

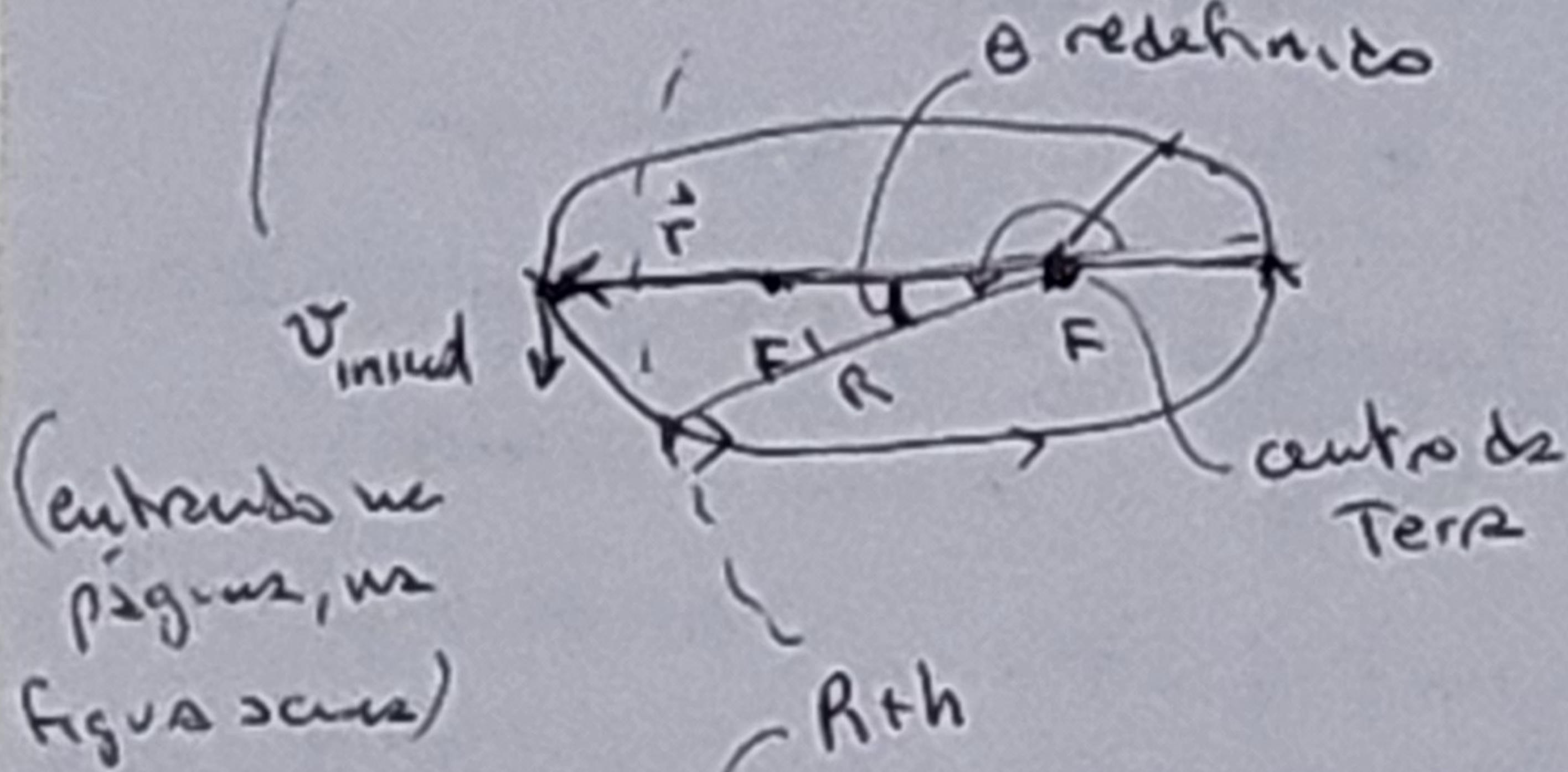
Qual o valor de ω p/ a Terra?

⊕ verifique!

NOTE: o resultado acima foi obtido por referencial não inercial, usando a expressão geral que derivamos (efeito da força de Coriolis, $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$) Mas poderíamos obter a deflexão de maneira alternativa, resolvendo o problema da força central, como anteriormente: temos traj. elípticas, com foco no centro da Terra



→ ver Marion figure 10-10 (confusa!)



Como vimos: $\frac{r_0}{r} = 1 + e \cos(\theta - \theta_0)$ origem de θ em geral $\rightarrow 0$
 com $r_0 = \frac{L^2}{m|k|}$ e $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$
 $L = GMm$

$L = m r^2 \cos \lambda \omega = m r v_{inercial}$
 pois $\vec{r} \perp \vec{v}_{inercial}$

em vez de tomar $\theta > \pi$ (i.e. $\theta_0 = \pi$ e θ próximo) vamos considerar ângulo θ a partir da horizontal, ou seja $\cos(\theta - \theta_0) \rightarrow -\cos \theta$

inicialmente $\theta = 0$, no final ($r = R$) $\theta = \theta_f$ (se não fosse a superfície, a pedra cairia por dentro da Terra continuando a elipse!)

partindo: $\frac{r_0}{r} = 1 - e \cos \theta$ início: $\frac{r_0}{R+h} = 1 - e$ ou seja: $r_0 = (1-e)(R+h)$

$\therefore r = \frac{(1-e)(R+h)}{1 - e \cos \theta}$

final: $\frac{r_0}{R} = 1 - e \cos \theta_f$

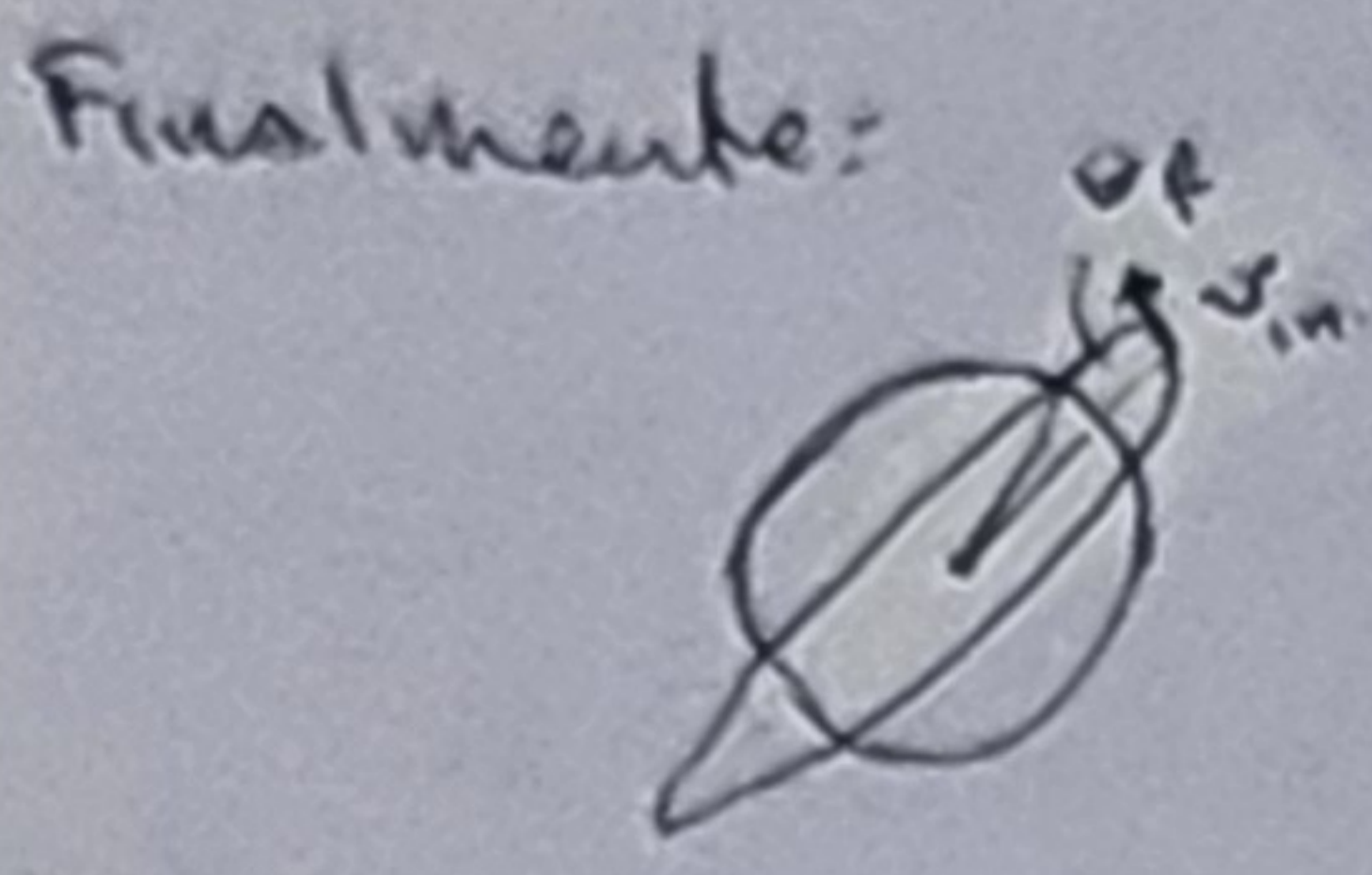
não confundir com ω da Terra!

é possível integrar usando: $L = \text{const} = m r^2 \dot{\theta}$
 $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m r^2} \rightarrow t = \frac{m}{L} \int_0^{\theta_f} r^2 d\theta = \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta_f} \frac{(1-e)^2 d\theta}{(1 - e \cos \theta)^2} \rightarrow \text{verifique!}$

Aproximando: temos $\frac{(1-e)(R+h)}{R} = 1 - e \cos \theta_f \rightarrow (1-e)(1+h/R) = 1 - e(1 - 2 \sin^2 \theta_f/2)$
 $h/R = \frac{2e}{1-e} \sin^2 \theta_f/2$ sabemos que $h \ll R$ e $e \approx 0$ (círculo) $\rightarrow \sin \theta_f/2 \approx \theta_f/2$

logo θ pequeno na integral: $t \approx \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta_f} \frac{(1-e)^2}{(1-e)^2 (1 + \frac{e \theta^2}{2(1-e)})^2} d\theta \sim \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta_f} (1 - \frac{e \theta^2}{2(1-e)}) d\theta$

→ tempo de caída $t \sim \frac{\theta_f}{\omega \cos \lambda} \left(1 - \frac{e \theta_f^2}{1-e} \right) \approx \frac{2h/R}{\omega \cos \lambda} \rightarrow \theta_f \sim \omega t \cos \lambda \left(1 + \frac{2h}{3R} \right)$



Finalmente: em relação à Terra parada, a pedra sofreu deflexão $R\theta$ ao cair, durante o tempo t dado acima. Como as distâncias R do foco/centro da Terra

→ Vamos supor $t \sim \sqrt{2h/g}$ como antes (queda livre usual)

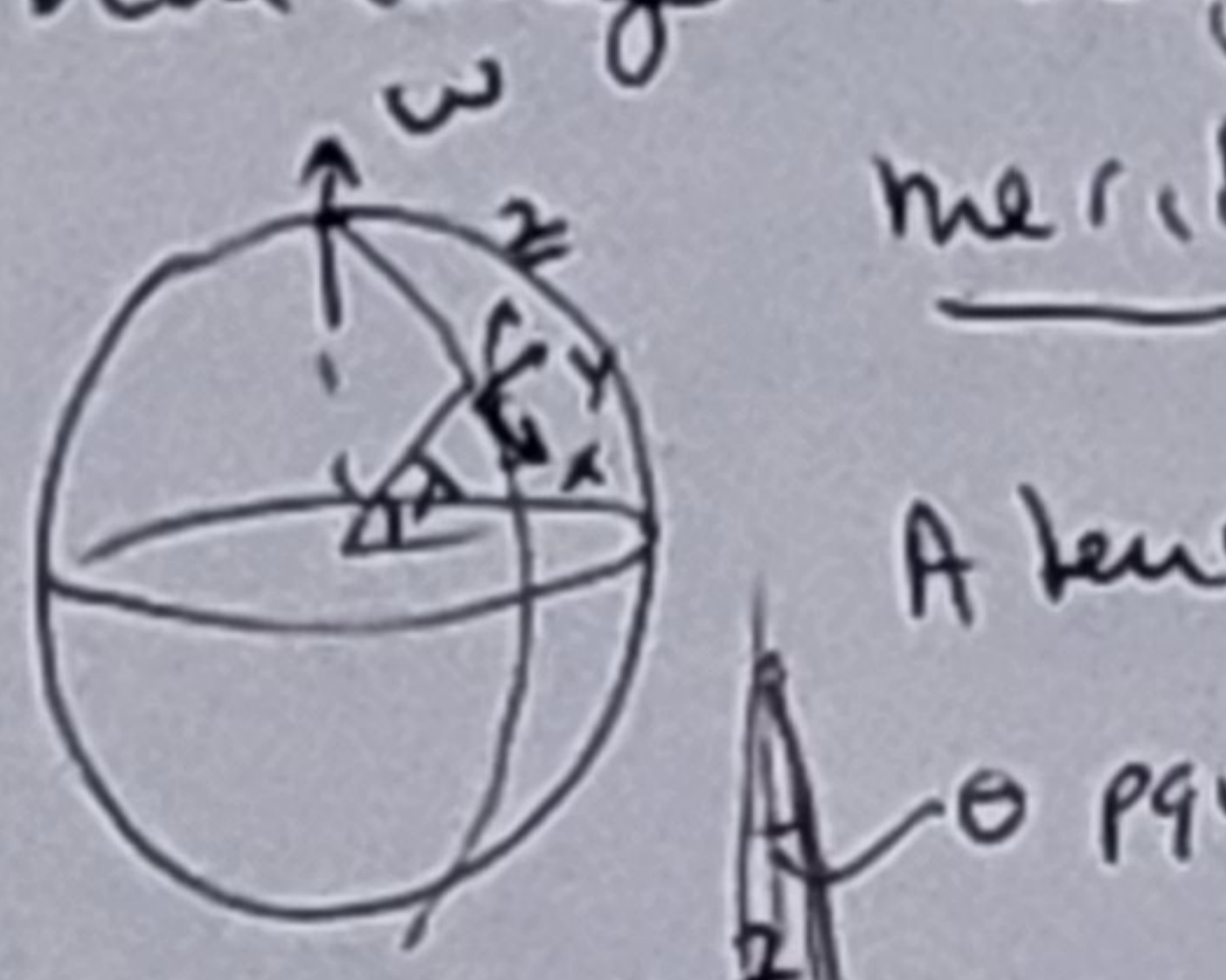
Neste tempo a Terra se moveu no sentido de diminuir a deflexão. arco = $R\omega t = R\omega \lambda \omega t$

Temos então: $d \sim R\theta_f - R\omega t \cos \lambda \sim \frac{2}{3} \frac{h}{R} \omega t \cos \lambda \sim \frac{2}{3} \omega \cos \lambda \frac{h}{R} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{\omega \sqrt{2h^3}}{3} \cos \lambda$

como acima!

⇒ BEM mais complicado, né!

PÊNULO de Foucault: efeito da rotação da Terra em pêndulo com fio bem longo → ângulo de oscilação pequeno, supondo z fixo, x ao longo do meridiano (como acima) e y ao longo do paralelo (como aqui)

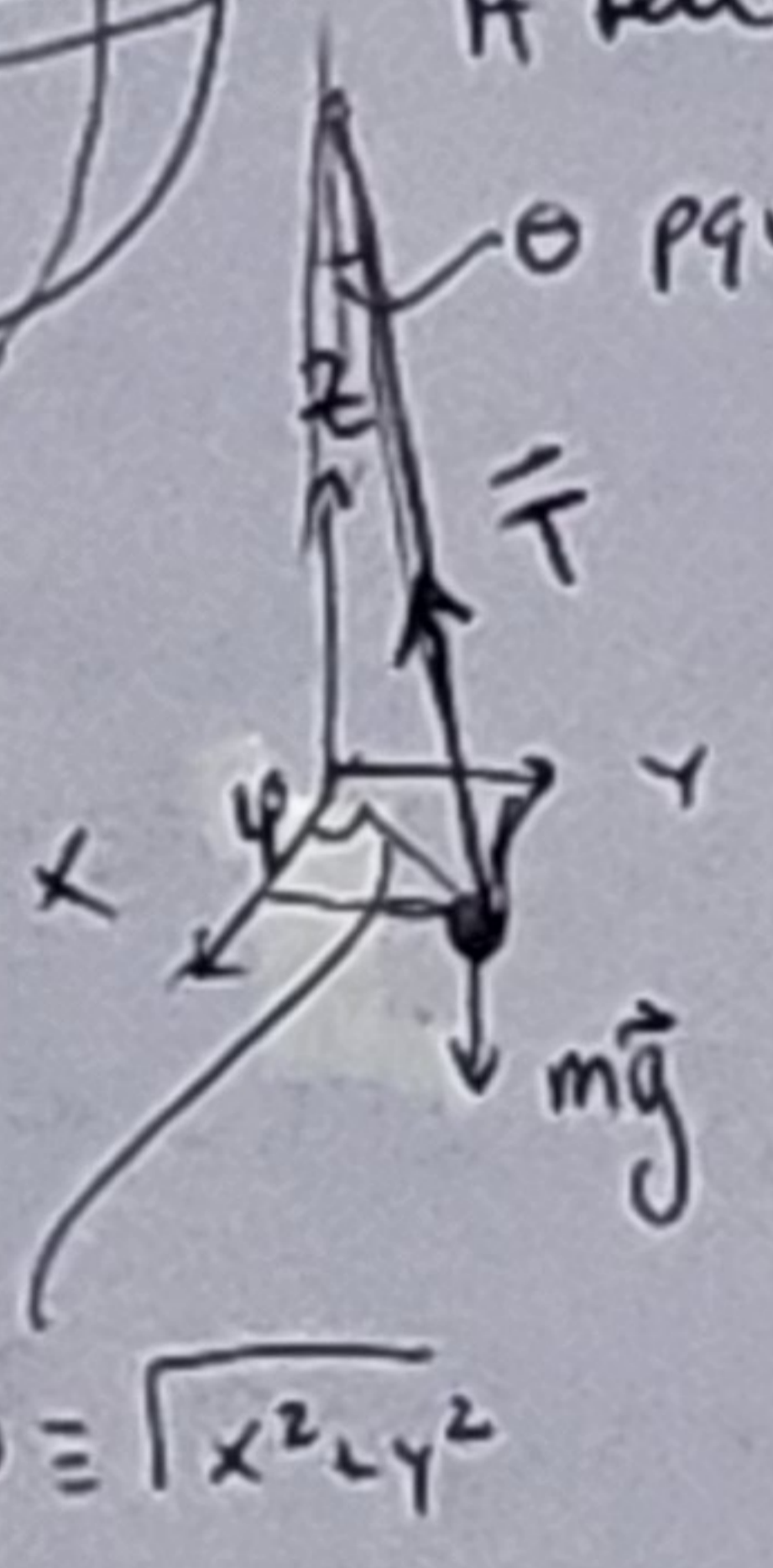


A tensão na corda será

$$\begin{cases} T_z = T \cos \theta \approx T \rightarrow z \text{ fixo, } T = mg \\ T_x = -T \sin \theta \cos \varphi = -T x/l \\ T_y = -T \sin \theta \sin \varphi = -T y/l \end{cases}$$

força restauradora → oscilação simples, se fosse a única força

em O' :



$\cos \varphi = \frac{x}{\rho}$
 $\sin \varphi = \frac{y}{\rho}$
 $\sin \theta = \frac{\rho}{l}$
 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ comprimento do fio

efeito da rotação da Terra:

$$\vec{a}_r = \vec{g} + \frac{\vec{T}}{m} - 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

Coriolis

efetivo, como visto acima, mas supondo reduzido

→ ou super z fixo, $\dot{z} = 0$, aí a velocidade \vec{v}_r está no plano xy e $\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ será dado por $(\vec{\omega} \cdot \hat{z}) \hat{z} \times$ no plano (como acima por as massas de ar etc) → fora do plano vai ignorar pois $\hat{z} \times$ tem $-\vec{m}\vec{g}$

$$\therefore \vec{\omega} \times \vec{v}_r \approx \omega \sin \lambda \hat{z} \times (\dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y}) = \omega \sin \lambda (\dot{x} \hat{y} - \dot{y} \hat{x}) = \omega_z (\dot{x} \hat{y} - \dot{y} \hat{x})$$

Forças no plano fornecem: $\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{T}{m} \frac{x}{l} + 2\omega_z \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{T}{m} \frac{y}{l} - 2\omega_z \dot{x} \end{cases}$ são osciladores acoplados, direção x está "misturada" é direção y por causa de ω_z

→ vamos procurar novos eixos no plano de forma que as oscilações desacoplem: $\ddot{x}' = -\sigma^2 x'$, $\ddot{y}' = -\sigma^2 y'$

Novo vetor em termos do antigo: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sendo $\varphi = \varphi(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix}$

aí faço derivadas segundas de $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, supondo $\ddot{\varphi} = 0$ (i.e. $\varphi = ct$) em termos de x e y , usando as eqs. acima, e obtenho: $\varphi = \omega_z$, $-\sigma^2 = -\alpha^2 - \omega_z^2$ ☹️ verifique!

$$\Delta \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + 2\dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} - \dot{\varphi}^2 \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

→ o 1º termo é dado pelas eqs. acima

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -\alpha^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\omega_z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \end{pmatrix} = -(\alpha^2 + \dot{\varphi}^2) \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \left[\omega_z \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix}$$

pl zeros termo $\dot{\varphi} = -\omega_z$

corresponde a oscilações desacopladas nas variáveis x' e y'

ou seja: dadas as combinações x' e y' sei que serão desacopladas, e as variáveis originais x, y serão dadas por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega_z t & \sin\omega_z t \\ -\sin\omega_z t & \cos\omega_z t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

→ rodadas por $\varphi = -\omega_z t$

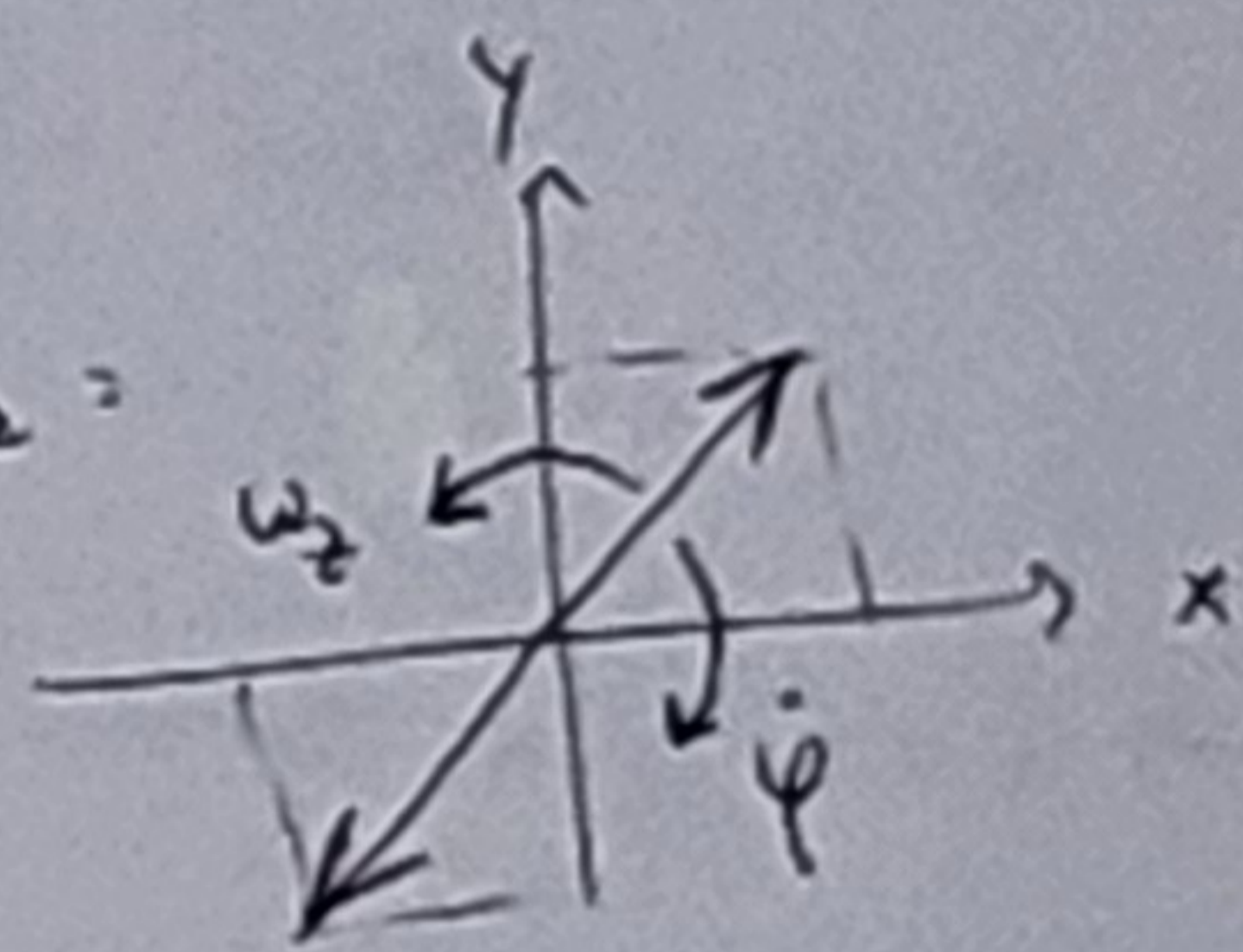
Por ex., se tenho condições iniciais tais que a oscilação é reta:

(x e y oscilando em fase, MHS com r^2) a reta correspondente

é combinação x', y' , e "vai girar" com $\varphi = -\omega_z t$ nas

coord. x, y → sentido horário no hemisfério norte (ω_z positivo, $\dot{\varphi}$ neg.)

e anti-horário no hem. sul → Demonstra rotação da Terra



veja



dá 2 volta em $\frac{24 \text{ hrs}}{\sin \lambda} \sim 32 \text{ hrs}$ em Paris

pl outros lugares é igual, substitua ω pela projeção na vertical local

Note: posso pensar que é oscilação fixa pl obs. externo, e.g. no polo norte tenho e a Terra gira "por baixo", i.e. vejo rotação na direção contrária



Precessão de LARMOR (ver Kibble Sec 5.5)

considere carga q orbitando ao redor de carga $-q'$ em campo externo \vec{B}

2ª lei de Newton: $m \vec{a}_r = -\frac{k}{r^2} \hat{r} + q \vec{v}_r \times \vec{B}$ em rel. ao sistema fixo

$$\vec{v}_r = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

pl referencial girante, como visto acima: $\vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\frac{k}{mr^2} \hat{r} + \frac{q}{m} (\vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B}$

tomando $\vec{\omega} = -\frac{q}{2m} \vec{B}$ vemos que os termos em \vec{v}_r cancelam } \odot verifique!

e temos $\vec{a}_r = -\frac{k}{mr^2} \hat{r} + \left(\frac{q}{2m}\right)^2 \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{r})$

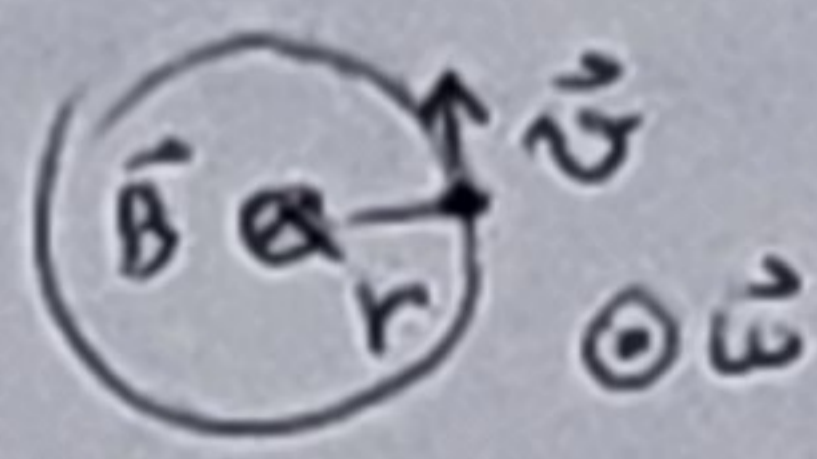
Pl campo fraco, tal que $\omega^2 = \left(\frac{qB}{2m}\right)^2 \ll \frac{k}{mr^3} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 mr^3} \approx \omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ período, de
leidas
áreas

eg. círculo c/ $\frac{k}{mr^2} = \frac{v^2}{r}$ terz $\omega_0^2 = \frac{v^2}{r^2} = \frac{k}{mr^3}$

eg. $\left(\frac{c}{2\pi}\right)^2 = \frac{m a^3}{1W}$ p/ ellipse

... como freq típica do campo B muito menor do que freq. da órbita

Note que $\vec{\omega} = -\frac{q}{2m} \vec{B}$ é comparável (= metade) à freq. de ciclotron:



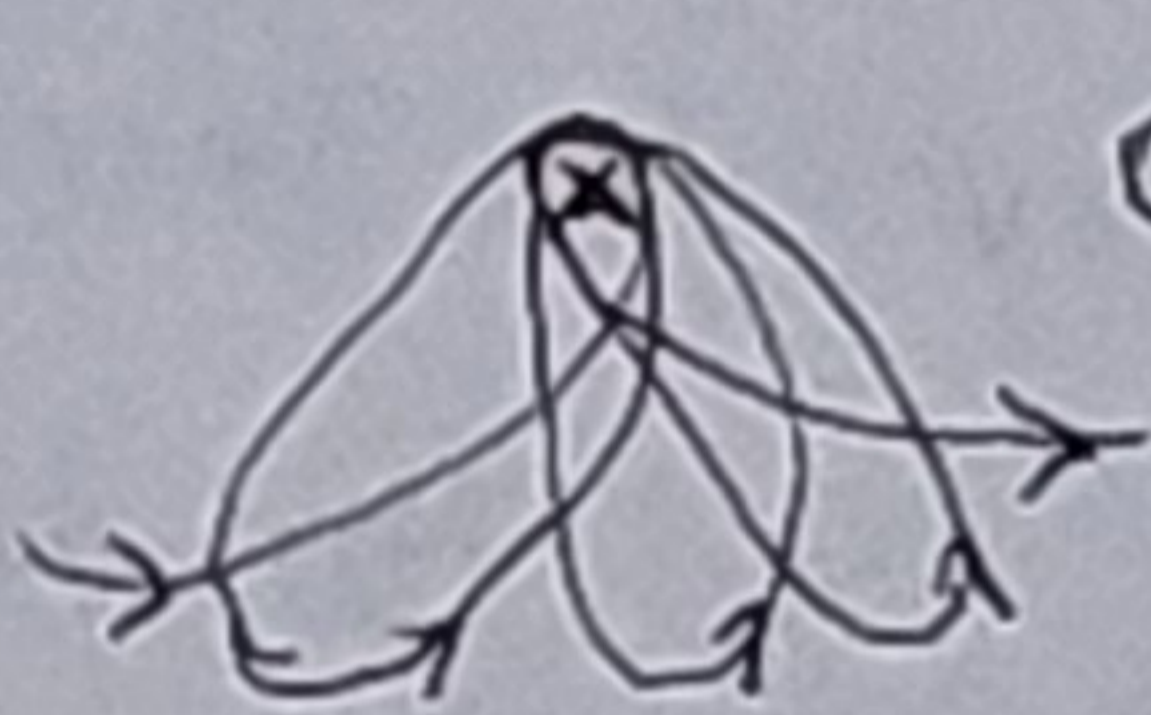
$q\vec{v} \times \vec{B} = -m\frac{v^2}{r} \hat{r} \rightarrow \frac{v}{r} = \omega = \frac{qB}{m} \rightarrow \vec{\omega} = -\frac{q\vec{B}}{m}$

$\vec{\omega}_{Larmor} = \frac{\vec{\omega}_{ciclotron}}{2}$

podemos desprezar termo em B^2 em \vec{a}_r , sera correto $\approx \left(\frac{qB}{2m}\right)^2 \cdot \frac{mr^3}{k} \ll 1$

e ... $\vec{a}_r = -\frac{k\hat{r}}{mr^2}$ corresponde a trajetória elíptica, em geral (órbita)

→ Para que serve? Em um ref. girante, com $\vec{\omega}_{Larmor}$, o movimento é bem simples, igual a ellipse. Portanto, no ref. fixo temos uma ellipse que gira, ou "precessions" ao redor do campo



note: precessão é mais lenta do que freq. da ellipse, ... vai girar bem pouco a cada revolução da ellipse

Ref. não inercial é útil tb para simplificar a resolução de 1 problema!