*Solução do Exercício 1, item **(a)***:

Para determinarmos o estimador de mínimos quadrados para β, basta minimizarmos a função S dada a seguir

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta x_i)^2.$$

Derivamos S com respeito a β e igualamos o resultado a 0, obtendo o seguinte

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\beta} S(\beta) &= 0, \\
-2 \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \beta x_i) &= 0, \\
\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\
\therefore \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.
\end{aligned}$$

Resta agora agora demonstrar que a segunda derivada de S avaliada em $\hat{\beta}$ é positiva, de forma que o ponto é mínimo

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\beta^2} S(\beta) &= 2 \sum_{i=1}^{n} x_i x_i, \\
&= 2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

*Solução do Exercício 1, item **(b)***:

Para determinarmos se o estimador de mínimos quadrados $\hat{\beta}$ é viesado calculamos seu valor esperado

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{E}[y_i]}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i x_i \beta}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \beta \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \beta.$$

Concluímos então que $\hat{\beta}$ é um estimador não viciado para β.

*Solução do Exercício 1, item **(c)***:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[\hat{\beta}] = \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right] \overset{y_i \perp y_j}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \mathbb{V}\mathrm{ar}[y_i]}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2} = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

*Solução do Exercício 1, item **(d)***:

$$\begin{aligned}
\mathrm{SSE} &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 - 2 y_i \hat{y}_i + \hat{y}_i^2) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} y_i \hat{y}_i + \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i^2, \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \hat{\beta} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \hat{\beta}^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \hat{\beta} \left[\hat{\beta} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} y_i x_i\right], \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \hat{\beta} \left[\frac{\sum_{i=}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} y_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \hat{\beta} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.
\end{aligned}$$

*Solução do Exercício 1, item **(e)**:*

Calculamos como segue

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{SSE}] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[y_i^2] - \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right], \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + x_i^2\beta^2) - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2\right], \\
&= n\sigma^2 + \beta^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\left(\mathbb{V}\text{ar}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right]^2\right), \\
&= n\sigma^2 + \beta^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\sigma^2 + \beta^2\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^2\right), \\
&= n\sigma^2 + \beta^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sigma^2 - \beta^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \\
&= (n-1)\sigma^2.
\end{aligned}$$

Disto, podemos determinar seguinte o estimador não viciado de σ^2:

$$\hat{\sigma^2} = \text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n-1}.$$

*Solução do Exercício 1, item **(f)**:*

Desta tabela temos que

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 6, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 14, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 10, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 50, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 20, \quad \hat{\beta} = \frac{20}{10} = 2,$$

$$\text{MSR} = \text{SSR} = 2\cdot 20 = 40, \quad \text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{5-1} = \frac{50 - 2\cdot 20}{4} = \frac{5}{2}, \quad F_{\text{obs}} = \frac{\text{MSR}}{\text{MSE}} = 40\cdot\frac{2}{5} = 16.$$

Testamos $\mathcal{H}_0 : \beta = 0$ a nível descritivo de $\alpha = 5\%$. Temos que a região crítica é $\text{RC} = \{x \in \mathbb{R} : x > 7,709\}$. Uma vez que $F_{\text{obs}} \in \text{RC}$, determinamos aqui que os dados nos levam a concluir, a nível descritivo de 5%, que existe pelo menos uma relação linear entre a receita de uma empresa e a quantidade vendida de um certo produto pela mesma.

Listing 1: *Implementação do Exercício 1, item **(f)***

```r
## Primeiramente, é instanciado o conjunto de dados.
dados <- data.frame(X = c(0, 1, 1, 2, 2),
                    Y = c(1, 2, 4, 2, 5))

## A função lm() realiza a regressão linear, onde o uso de -1 na fórmula indica que
    será utilizado o modelo sem intercepto.
reg <- with(data = dados, lm(Y ~ -1 + X))

## O conjunto de dados é atualizado com os valores ajustados (Y chapéu).
dados$Y_fit <- reg$fitted.values

## As somas de quadrados são calculadas.
SST <- with(data = dados, sum(Y ** 2))
SSE <- with(data = dados, sum((Y - Y_fit) ** 2))
SSR <- SST - SSE

## A partir das somas de quadrados, estima-se a estatística teste, e é calculado o
    seu nível de significância associado.
```

```r
F_obs <- (SSR / 1) / (SSE / (nrow(dados) - 1))
pf(q = F_obs, df1 = 1, df2 = nrow(dados) - 1)
```

*Solução do Exercício 2, item **(a)***:

Dos dados fornecidos, podemos obter ainda o seguinte

$$\bar{x} = \frac{11}{2}, \quad \bar{y} = \frac{41}{2}, \quad \sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 385 - 10 \cdot \frac{121}{4} = \frac{165}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 1.375 - \frac{41}{2} \cdot 55 - \frac{11}{2} \cdot 205 + 10 \cdot \frac{11}{2}\frac{41}{2} = \frac{495}{2}.$$

Supondo aqui que existe uma relação linear entre X e Y, para estimarmos a função de custo basta determinarmos a reta $\beta_0 + \beta_1 x$. Usando dos resultados expostos acima, temos que

$$\hat{\beta}_1 = \frac{495}{2}\frac{2}{165} = 3,$$
$$\hat{\beta}_0 = \frac{41}{2} - 3\frac{11}{2} = 4.$$

Concluímos portanto que a função de custo total é estimada por $\hat{f}(x) = 4 + 3x$.

*Solução do Exercício 2, item **(b)** (Solução via teste t)*:
Buscamos agora testar $\mathcal{H}_0 : \beta_1 = 0$. Consideramos aqui que é possível encontrar MSE $= 5/2$, logo t_{obs} é dado por

$$t_{\text{obs}} = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\frac{5}{2}\frac{2}{165}}} = 3\sqrt{33} \approx 17,234.$$

Para este teste nossa região crítica é definida por RC $= \{x \in \mathbb{R} : x > 3,355\}$. Uma vez que $t_{\text{obs}} \in$ RC, determinamos aqui que os dados nos levam a concluir, a nível descritivo de 1%, que o custo marginal é diferente de 0.

(Solução via teste F): Podemos ainda construir uma tabela ANOVA para realizar o mesmo teste ($\mathcal{H}_0 : \beta_1 = 0$). É possível calcularmos as somas de quadrados SST $= 1525/2$ e SSR $= 1485/2$. É obtida a seguinte tabela de análise de variância

FV	GL	SS	MS	F_{obs}
Regressão	1	20	$5/2$	297
Resíduo	8	$1.485/2$	$1.485/2$	
Total	9	$1.525/2$		

Para este teste nossa região crítica é definida por RC $= \{x \in \mathbb{R} : x > 11,259\}$. Uma vez que $F_{\text{obs}} \in$ RC, determinamos aqui que os dados nos levam a concluir, a nível descritivo de 1%, que o custo marginal é diferente de 0. Podemos notar aqui o fato que $F_{\text{obs}} = t^2_{\text{obs}}$.

Listing 2: *Implementação do Exercício 2, item (**b**)*

```r
## Primeiramente, é instanciado o conjunto de dados.
dados <- data.frame(X = c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10),
                    Y = c(7, 11, 15, 14, 18, 21, 23, 30, 32, 34))

## A função lm() realiza a regressão linear.
reg <- with(data = dados, lm(Y ~ X))

## O conjunto de dados é atualizado com os valores ajustados (Y chapéu).
dados$Y_fit <- reg$fitted.values

```

```r
## As somas de quadrados são calculadas.
SST <- with(data = dados, sum((Y - mean(Y)) ** 2))
SSE <- with(data = dados, sum((Y - Y_fit) ** 2))
SSR <- SST - SSE

## A partir das somas de quadrados, estima-se a estatística teste, e é calculado o seu nível de significância associado.
F_obs <- (SSR / 1) / (SSE / (nrow(dados) - 1))
pf(q = F_obs, df1 = 1, df2 = nrow(dados) - 1)
```

*Solução do Exercício 2, item **(c)**:*

Para construção do intervalo de confiança de $\text{IC}(\beta_0, 95\%)$, primeiramente determinamos o valor da constante $t_c \approx 2,306$. Feito isso, temos

$$\begin{aligned}\text{IC}(\beta_0, 95\%) &= \left[4 - t_c\sqrt{\frac{\frac{5}{2}\cdot 385}{10\cdot\frac{165}{2}}}; 4 + t_c\sqrt{\frac{\frac{5}{2}\cdot 385}{10\cdot\frac{165}{2}}}\right],\\ &= \left[4 - t_c\sqrt{\frac{7}{6}}; 4 + t_c\sqrt{\frac{7}{6}}\right] \approx [1,509;\ 6,491].\end{aligned}$$

Listing 3: *Implementação do Exercício 2, item (**c**)*

```r
## A função confint() calcula o intervalo de confiança para todos parâmetros do modelo de regressão, e ao selecionarmos apenas os valores em sua primeira linha temos o limite inferior e superior para beta_0.
ic_beta0 <- confint(object = reg, level = .95)[1 , ]
```

*Solução do Exercício 2, item **(d)**:*

Utilizando dos dados obtidos no enunciado, temos que

$$\sum_{i=1}^{10}(y_i - \bar{y})^2 = 4.965 - 10\cdot\frac{1.681}{4} = \frac{1.525}{2}.$$

Dado este valor, podemos determinar o coeficiente de explicação como segue

$$R^2 = [r(x,y)]^2 = \left(\frac{\frac{495}{2}}{\sqrt{\frac{165}{2}}\sqrt{\frac{1.525}{2}}}\right) = \frac{3267}{3355} \approx 0,974.$$

Listing 4: *Implementação do Exercício 2, item (**d**)*

```r
## A função summary() exibe diversos resultados com respeito ao modelo ajustado, e desta podemos extrair o coeficiente de determinação 'r.squared'.
summary(object = reg)$r.squared
```

*Solução do Exercício 2, item **(e)**:*

Utilizando dos dados do enunciado, temos

$$\begin{aligned}\text{IC}(\mathbb{E}[y_k|x_k = 10], 95\%) &= \left[4 + 3\cdot 10 - t_c\sqrt{\left(\frac{1}{10} + \frac{\frac{81}{4}}{\frac{165}{2}}\right)\frac{5}{2}}; 4 + 3\cdot 10 + t_c\sqrt{\left(\frac{1}{10} + \frac{\frac{81}{4}}{\frac{165}{2}}\right)\frac{5}{2}}\right],\\ &= \left[34 - t_c\sqrt{\frac{19}{22}};\ 34 + t_c\sqrt{\frac{19}{22}}\right],\\ &\approx [31,857;\ 36,143].\end{aligned}$$

Listing 5: *Implementação do Exercício 2, item (**e**)*

```
## A função predict() constrói o intervalo de confiança ou preditivo para novas
    observações, cujos valores são dados através do atributo 'newdata'. Nota-se que
     para o atributo 'interval' foi passado o valor "confidence".
predict(object = reg, newdata = data.frame(X = 10), interval = 'confidence')
```

*Solução do Exercício 2, item **(f)**:*

Utilizando dos dados do enunciado, temos

$$\begin{aligned}
\text{IC}\left(\widetilde{y}_k|x_k = \frac{11}{2}, 95\%\right) &= \left[4 + 3\cdot\frac{11}{2} - t_c\sqrt{\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{0}{\frac{165}{2}}\right)\frac{5}{2}}; 4 + 3\cdot\frac{11}{2} + t_c\sqrt{\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{0}{\frac{165}{2}}\right)\frac{5}{2}}\right], \\
&= \left[\frac{41}{2} - t_c\frac{1}{2}\sqrt{11};\ \frac{41}{2} + t_c\frac{1}{2}\sqrt{11}\right], \\
&\approx [16,676;\ 24,324].
\end{aligned}$$

Listing 6: *Implementação do Exercício 2, item (**f**)*

```
## Nota-se que para o atributo 'interval' foi passado o valor "prediction".
predict(object = reg, newdata = data.frame(X = 11 / 2), interval = 'prediction')
```

*Solução do Exercício 3, item **(a)**:*

Utilizando dos dados fornecidos no enunciado, temos que

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 &= \frac{19200}{1600} = 12, \\
\hat{\beta}_0 &= 70 - 12\cdot 5 = 10.
\end{aligned}$$

*Solução do Exercício 3, item **(b)**:*

Podemos interpretar $\hat{\beta}_0$ como a despesa padrão para uma viagem, ou também assim denominá-la de custo mínimo para a viagem, isto é, a despesa esperada de uma viagem de 0 dias, ou despesa mínima, é de 10 unidades monetárias. Por sua vez, $\hat{\beta}_1$ indica o custo adicional diário de viagem, de forma que cada dia adicional de duração da viagem incrementa 12 unidades monetárias à despesa esperada.

*Solução do Exercício 3, item **(c)**:*

Denotaremos a quantidade de dinheiro ótima para viagem sob as condições impostas como C. Buscamos então C tal que

$$\mathbb{P}(\tilde{y}_k > C | x_k = 7) = \frac{1}{10}.$$

Sabe-se que $\widehat{\mathbb{V}\mathrm{ar}[\tilde{y}_k|x_k]} = {}^{20651}/_{204}$ e $\widehat{\mathbb{E}[\tilde{y}_k|x_k]} = 94$. Disto, temos que sua distribuição preditiva é aproximada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{\tilde{y}_k - 94}{\sqrt{{}^{20651}/_{204}}} > C \middle| x_k = 7\right) &= \frac{1}{10}, \\
1 - \mathbb{P}\left(\frac{\tilde{y}_k - 94}{2^{-1}\sqrt{{}^{20651}/_{51}}} \leq C \middle| x_k = 7\right) &= \frac{1}{10}, \\
\mathbb{P}\left(\frac{\tilde{y}_k - 94}{2^{-1}\sqrt{{}^{20651}/_{51}}} \leq C \middle| x_k = 7\right) &= \frac{9}{10}, \\
C &= 2^{-1}\sqrt{{}^{20651}/_{51}} F^{-1}_{t_{100}}\left(\frac{9}{10}\right) + 94, \\
C &\approx 106,98 \quad ,
\end{aligned}$$

onde $F^{-1}_{t_{100}}$ indica a função quantílica associada à distribuição t de Student com 100 graus de liberdade. Em conclusão, o vendedor deve levar, aproximadamente, 106,98 unidades monetárias para que o risco de faltar dinheiro durante sua viagem de 7 dias seja inferior a 10%.

*Solução do Exercício 4, item **(a)**:*

Seja uma amostra aleatória $Y_1, \ldots, Y_n$ onde $Y_i \sim \mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2), \forall i \in \{1, 2 \ldots, n\}$, onde $\beta_0 \in \mathbb{R}, \beta_1 \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ são parâmetros desconhecidos e $x_i \in \mathbb{R}, \forall i\{1, 2, \ldots, n\}$ são constantes conhecidas, a função de log-verossimilhança associada é escrita como segue

$$\mathrm{L}(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2}\frac{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{\sigma^2} + \log \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(y_i) \right]. \tag{1}$$

Para encontrarmos o estimador de β_0 derivamos (1) com respeito a β_0 e igualamos o resultado a 0, obtendo como segue

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta_0}\mathrm{L}(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | y_1, \ldots, y_n) &= 0, \\
\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) &= 0, \\
n\beta_0 &= \sum_{i=1}^{n} y_i - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i, \\
\therefore \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}.
\end{aligned}$$

Para determinarmos o estimador de $\hat{\beta}_1$ derivamos (1) com respeito a β_1 e igualamos o resultado a 0, obtendo como segue

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta_1}\mathrm{L}(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | y_1, \ldots, y_n) &= 0, \\
\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) &= 0, \\
\beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i, \\
\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i, \\
\hat{\beta}_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i \right) &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{n} x_i, \\
\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \\
\therefore \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.
\end{aligned}$$

*Solução do Exercício 4, item **(a)** (continuada)*:

Para encontrarmos o estimador de σ^2 derivamos (1) com respeito a σ^2 e igualamos o resultado a 0, obtendo como segue

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\mathrm{L}(\beta_0,\beta_1,\sigma^2|y_1,\ldots,y_n) &= 0,\\
-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)^2}{\sigma^4} &= 0,\\
n\sigma^2 &= \sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)^2\\
\therefore \hat{\sigma}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_i)^2}{n}.
\end{aligned}$$

Para determinarmos se os valores encontrados realmente são máximos, calculamos a matriz Jacobiana associada a (1), e verificamos se esta é definida negativa

$$\nabla^2\mathrm{L}(\beta_0,\beta_1,\sigma^2|y_1,\ldots,y_n) =$$
$$-\frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}x_i & \sigma^{-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)\\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sigma^{-2}\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)\\ \sigma^{-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1x_i) & \sigma^{-2}\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\beta_0-\beta_1x_i) & \sigma^{-4}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)^2-n(2\sigma^2)^{-1}\end{bmatrix}.$$

Substituímos então os estimadores obtidos na matriz Jacobiana, obtendo o seguinte

$$\nabla^2\mathrm{L}(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\sigma}^2|y_1,\ldots,y_n) = -\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}x_i & 0\\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & 0\\ 0 & 0 & n(2\hat{\sigma}^2)^{-1}\end{bmatrix}.$$

Para que a matriz seja definida negativa, basta mostrarmos então que sua determinante é inferior a zero, o que é feito como segue

$$\det\nabla^2\mathrm{L}(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\sigma}^2|y_1,\ldots,y_n) = -\frac{1}{\hat{\sigma}^2}n(2\hat{\sigma}^2)^{-1}\left[n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right] = -\frac{2n}{\hat{\sigma}^4}\left[n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right] < 0.$$

Concluímos portanto que os estimadores são pontos de máximo da função de verossimilhança. Feito isso, resta agora demonstrar que $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ não são viciados. Temos que o valor esperado de $\hat{\beta}_1$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\beta}_1] = \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right] &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\mathbb{E}[(y_i-\bar{y})]}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\beta_0+x_i\beta_1-\beta_0-\bar{x}\beta_1)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_1(x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\\
&= \beta_1.
\end{aligned}$$

Em conclusão, $\hat{\beta}_1$ é não viciado para β_1. Para $\hat{\beta}_0$, temos o sguinte valor esperado

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}_0] = \mathbb{E}\left[\bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x}\right] = \beta_0+\beta_1\bar{x}-\bar{x}\mathbb{E}[\beta_1] = \beta_0.$$

Em conclusão, temos que $\hat{\beta}_0$ não é viciado para β_0.

*Solução do Exercício 4, item **(b)***:

Para determinarmos o vício de $\hat{\sigma}^2$ é necessário calcularmos seu valor esperado

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2}{n}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[\text{SSE}] = \frac{n-2}{n}\sigma^2.$$

Por consequência, o vício é dado por

$$\mathbb{B}(\sigma^2, \hat{\sigma}^2) = \mathbb{E}[\sigma^2 - \hat{\sigma}^2] = \sigma^2 - \frac{n-2}{n}\sigma^2 = \frac{2}{n}\sigma^2.$$

*Solução do Exercício 4, item **(c)***:

No contexto usual da estimação via máxima verossimilhança da variância para uma amostra de variáveis aleatórias normais de média $\mu \in \mathbb{R}$ é usual que o EMV seja viciado, porém nota-se neste contexto usual o vício é de valor $1/n$, diferente do encontrado no contexto da regressão linear, que é $2/n$.