MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II - 2023
Lista 5

1. Funções de Duas Variáveis: Regra da Cadeia

1. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ usando a Regra da Cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida da aplicação das regras de derivação parcial.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x = t^2 + u^2$, $y = 2tu$

b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $x = t\cos u$, $y = t\sin u$

2. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$, onde a é uma constante, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(2t^3-4t, t^4-3t)$. Determine a de modo que a reta tangente ao gráfico de g em $(1, g(1))$ seja paralela à reta $y = 2x+3$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 4$ e $f(t^2, 2t^3) = 1 + e^{2t-2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Determine o plano tangente ao gráfico de f em $(1,2,f(1,2))$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^1$ e suponha que o plano tangente ao gráfico de f em $(0,2,f(0,2))$ tenha equação $2x+y+z=7$. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(u,v) = uf\left(\sin(u^2-v^3), 2u^2v\right)$. Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g em $(1,1,g(1,1))$ seja paralelo ao vetor $(4,2,a)$.

5. Neste exercício, vamos explicitar as soluções da equação da onda unidimensional, ou seja, determinar funções $u : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$, tais que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, onde c é uma constante não nula. Este método foi descrito por Jean le Rond d'Alembert em torno de 1750.

a) Mostre que a mudança de coordenadas $\alpha = x - ct$ e $\beta = x + ct$ permite reescrever a equação da onda na forma $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial \alpha} = 0$.

b) Determine todas as soluções de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial \alpha} = 0$ e conclua que as soluções da equação original são da forma $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$, onde $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são de classe $\mathscr{C}^2$.

Observação: a forma da solução nos diz que ela é a composição de duas ondas arbitrárias viajando em sentidos opostos com velocidade c. Veja uma animação clicando aqui.

6. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis até 2ª ordem. Mostre que a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ é solução da equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

7. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^2$ e defina $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \Delta u(r\cos\theta, r\sin\theta),$$

onde $\Delta u(x,y) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$ (chamado de *Laplaciano* de u).

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^2$ e defina $u(s,t) = f(e^s\cos t, e^s \sin t)$. Verifique que

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(e^s\cos t, e^s\sin t)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(e^s\cos t, e^s\sin t)\right]^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}(s,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)\right)^2\right]$$

e que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^s\cos t, e^s\sin t)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e^s\cos t, e^s\sin t)=e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s,t)+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(s,t)\right]$$

para todo $(s,t)\in\mathbb{R}^2$.

9. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^2$ e seja $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $g(u,v)=uf(u^2-v,u+2v)$. Sabendo que o plano tangente ao gráfico de f em $(1,4,f(1,4))$ tem equação $3x+5y=z+26$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,4)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4)=1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,4)=-1$, calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(-2,3)$.

10. Seja $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^2$ e defina $F(r,s)=G(e^{rs},r^3\cos s)$. Determine $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1,0)$ sabendo que $\dfrac{\partial G}{\partial y}(t^2+1,t+1)=t^2-2t+3$ para todo $t\in\mathbb{R}$.

11. Sejam A um subconjunto aberto e não vazio de $\mathbb{R}^2$ e $f:A\to\mathbb{R}$ uma função *harmônica em A*, isto é, uma função de classe $\mathscr{C}^2$ satisfazendo $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$. Sejam também B um subconjunto aberto e não vazio de $\mathbb{R}^2$ e $g,h:B\to\mathbb{R}$ duas funções de classe $\mathscr{C}^2$ tais que $(g(x,y),h(x,y))\in A$ para todo $(x,y)\in B$ e satisfazendo $\dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{\partial h}{\partial y}$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}=-\dfrac{\partial g}{\partial y}$.

a) Mostre que g e h são harmônicas.

b) Mostre que a função $F(x,y)=f(g(x,y),h(x,y))$ também é harmônica.

12. Seja $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y-y^3}{x^4+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

a) Calcule as derivadas parciais de f em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ e mostre que $\nabla f(0,0)=(0,-1)$.

b) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$, mas $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não é contínua em $(0,0)$. Conclua que f é diferenciável em $(0,0)$.

c) Determine a curva de nível $c=0$ de f e mostre que esta curva *não* é, em nenhuma vizinhança de $(0,0)$, o gráfico de uma função $y=g(x)$ ou $x=h(y)$. Por que isto não viola o Teorema da Função Implícita?

13. Seja $f(x,y)=\begin{cases}x^3\sin\left(\dfrac{y}{x}\right), & \text{se } x\neq 0,\\ 0, & \text{se } x=0.\end{cases}$

a) Mostre que f é de classe $\mathscr{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.

b) Determine a curva de nível $c=0$ de f e mostre que esta curva é a reunião de infinitas retas distintas que passam pela origem. Por que isto não viola o Teorema da Função Implícita?

14. **(Desigualdade do Valor Médio)** Sejam A um subconjunto aberto, convexo e não vazio de $\mathbb{R}^2$ e $f:A\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável em A. Suponha que exista $M>0$ tal que $\|\nabla f(x,y)\|\leq M$ para todo $(x,y)\in A$. Mostre que

$$|f(q)-f(p)|\leq M\|q-p\|, \forall p,q\in A.$$

(*Sugestão:* use o Teorema do Valor Médio e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.)

2. Vetor Gradiente e Derivada Direcional

1. Seja $f(x,y) = x^2+4y^2$. Determine o vetor gradiente de f em $(2,1)$ e use-o para encontrar a equação da reta tangente à curva de nível $c = 8$ de f em $(2,1)$. Esboce esta curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

2. Seja r a reta tangente à curva $x^3+3xy+y^3+3x = 18$ em $(1,2)$. Determine as retas que são tangentes à curva $x^2+xy+y^2 = 7$ e paralelas à reta r.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabe-se que o plano tangente ao gráfico de f em um certo ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tem equação $-2x+2y-z+3 = 0$. Determine, entre as curvas abaixo, uma que *não pode* ser a curva de nível de f que contém o ponto (x_0, y_0).

a) $\gamma : (0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(-\frac{1}{t}, t\right)$

b) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(\frac{t^5}{5}, -\frac{2t^3}{3}+3t\right)$

c) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(t^2, t^3+t\right)$

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\nabla f(1,1) = (1,-1)$. Sabendo que exatamente uma das curvas abaixo tem imagem contida na curva de nível de f que contém o ponto $(1,1)$, assinale a alternativa que contém tal curva.

a) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(t^3, t\right)$

b) $\gamma : (0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(t, \frac{1}{t}\right)$

c) $\gamma : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sec t, \tan t+1)$

d) $\gamma : (0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, \ln t+1)$

e) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t+1, \sin t)$

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^1$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) A imagem da curva $\gamma(t) = (\cot t, \sec^2 t)$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, está contida numa curva de nível de f.

(ii) A imagem da curva $\sigma(u) = \left(\sqrt[3]{u}, u^2+1, \frac{u^3}{2} - \frac{\sqrt[3]{u}}{2}+1\right)$, $u > 0$, está contida no gráfico de f.

Faça o que se pede em cada item abaixo.

a) Determine $\nabla f(1,2)$.

b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,2)$, onde $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f em $(1,2,f(1,2))$.

6. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (t, 2t^2, t^2)$. Seja r a reta tangente à curva de nível $c = 4$ de f em $(2,8)$. Sabendo que a imagem de γ está contida no gráfico de f e que a reta r contém o ponto $(1,-4)$, determine:

a) O vetor gradiente de f em $(2,8)$.

b) Uma equação do plano tangente ao gráfico de f em $(2,8,f(2,8))$.

7. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, π o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e $\gamma(t) = \left(1+\frac{1}{t}, t\right)$, $t \neq 0$, uma parametrização da curva de nível $c = 1$ de f. Suponha que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ para algum $t_0 \neq 0$. Sabendo que π contém os pontos $(1,1,\frac{1}{2})$ e $(4,1,2)$, determine uma equação de π.

8. Mostre que a função $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$ é contínua em $(0,0)$ e admite derivadas direcionais em todas as direções em $(0,0)$. Determine também se f é diferenciável em $(0,0)$.

9. Determine a derivada direcional máxima de f no ponto (x_0,y_0) e a direção e o sentido em que ela é atingida, onde:

a) $f(x,y)=xe^{-y}+3y$, $(x_0,y_0)=(1,0)$

b) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, $(x_0,y_0)=(1,2)$

10. Determine todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais a direção de maior variação de $f(x,y)=x^2+y^2-2x-4y$ é a do vetor $(1,1)$.

11. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável e suponha que a imagem da curva $\gamma(t)=(t+1,-t^2)$ seja uma curva de nível de f. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,-4)=2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1,-4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

12. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável cujo gráfico contém as imagens das curvas $\gamma(t)=\left(-\frac{t}{2},\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right)$, $t\in\mathbb{R}$, e $\sigma(u)=\left(u+1,u,u+2+\frac{1}{u}\right)$, $u\neq 0$. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$, onde $\vec{u}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

13. Seja $f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{se } y=x^2 \text{ e } x\neq 0,\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$

a) Dado $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$ um vetor unitário, mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)=0$.

b) f é contínua em $(0,0)$?

14. Seja $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

a) Calcule $\nabla f(0,0)$.

b) Dado $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$ um vetor unitário, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$.

c) Dadas $\gamma(t)=(t,t)$ e $g(t)=f(\gamma(t))$, mostre que $g'(0)\neq\langle\nabla f(0,0),\gamma'(0)\rangle$. Por que isto não viola a Regra da Cadeia?

15. Seja $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

a) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)=\langle\nabla f(0,0),\vec{u}\rangle$ para todo vetor unitário $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$.

b) f é diferenciável em $(0,0)$?

16. Sejam A um subconjunto aberto e não vazio de $\mathbb{R}^2$ e $f:A\to\mathbb{R}$ uma função. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) f é de classe $\mathscr{C}^1$ em A.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ existe e é contínua em todos os pontos de A, para todo vetor unitário $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$.