Questão 1 - Um método clássico para determinar soluções de problemas de elasticidade plana é baseado na função de tensão de Airy. Mostra-se que o campo de tensões dado por

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \Omega_{,yy}\\ \sigma_{yy} &= \Omega_{,xx}\\ \sigma_{xy} &= -\Omega_{,xy}\end{aligned}$$

atende as equações de equilíbrio para $f_x^B = f_y^B = 0$ e gera um campo de deformação a partir da lei de Hooke que é compatível (corresponde a um campo de deslocamentos bem definido).

A função de tensão de Airy $\Omega(x,y)$ é qualquer função que atenda

$$\nabla^4\Omega = 0$$

onde

$$\begin{aligned}\nabla^4(\square) &= (\square)_{,xxxx} + 2(\square)_{,xxyy} + (\square)_{,yyyy}\\ (\square)_{,x} &= \frac{\partial(\square)}{\partial x}\\ (\square)_{,y} &= \frac{\partial(\square)}{\partial y}\\ (\square)_{,xy} &= \frac{\partial(\square)}{\partial x\partial y}\end{aligned}$$

a) Considere a função de tensão dada por:

$$\Omega = Ax^3y$$

onde *A* é uma constante.

Mostre que $\Omega = Ax^3y$ é uma função de tensão de Airy. Determine o problema de chapa (estado plano de tensões) que é resolvido por tal função quando se considera o domínio da chapa dado por $-a \le x \le a, -b \le y \le b$, isto é, determine o campo de tensões e desenhe um diagrama nas bordas da chapa com as forças de superfície que corresponde a esta solução.

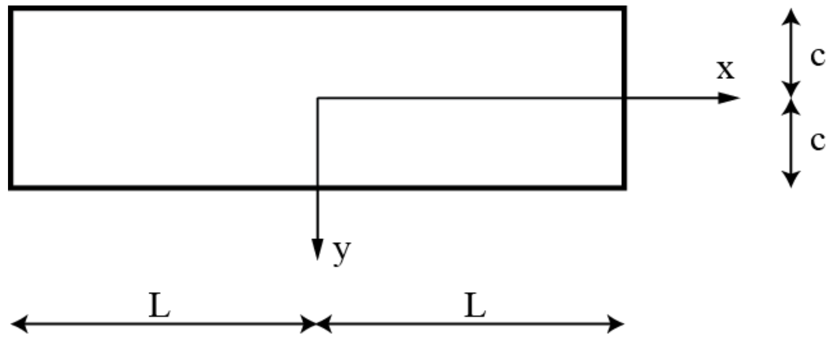
Considere os seguintes polinômios:

$$\left\{\Omega_1 = \frac{a}{2}x^2;\quad \Omega_2 = \frac{b}{2}x^2y;\quad \Omega_3 = \frac{d}{6}\left(x^2y^3 - \frac{1}{5}y^5\right)\right.$$

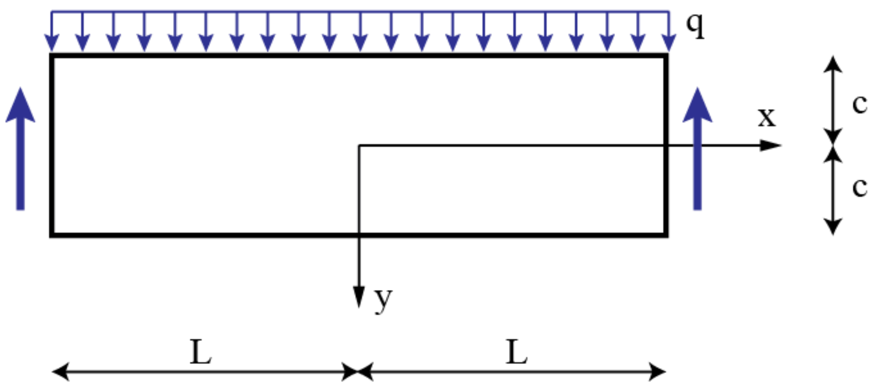
onde *a*, b e *d* são constantes. Pedem-se:

b) Justificar se tais polinômios podem ou não ser tomados como funções de tensão de Airy.

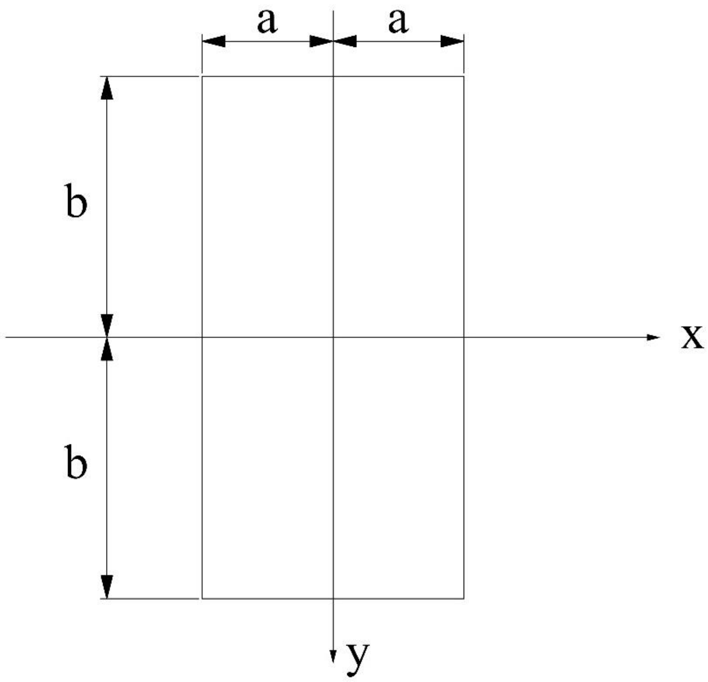
c) Considerando a chapa de espessura unitária mostrada abaixo, mostrar as condições de borda associadas à escolha de Ω_1, Ω_2 e Ω_3 como funções de tensão de Airy.



d) Considerando o problema dado pela figura abaixo, determinar as constantes *a*, *b* e *d* tal que a superposição das soluções geradas pelas funções de tensão Ω_1, Ω_2 e Ω_3 satisfaça as condições de contorno para as bordas $y = c$ e $y = -c$.



Questão 2 – Considere o problema da torção uniforme de uma barra prismática de seção transversal retangular como indicada abaixo.



(i) Considere a abordagem que utiliza a analogia de membrana. Recorda-se que a equação diferencial que rege o problema de membrana é:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{P}{T}$$

onde P é a pressão, T a tensão superficial e $w = 0$ no contorno.

Procura-se uma solução na forma de

$$w(x, y) = \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} b_n \cos\frac{n\pi x}{2a} Y_n(y)$$

Onde b_n são os coeficientes da série e Y_n são funções somente da variável y.

Mostre, impondo as condições de contorno, que

$$Y_n(y) = \frac{16pa^2}{Tn^3\pi^3 b_n}(-1)^{(n-1)/2}\left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{n\pi y}{2a}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right)}\right]$$

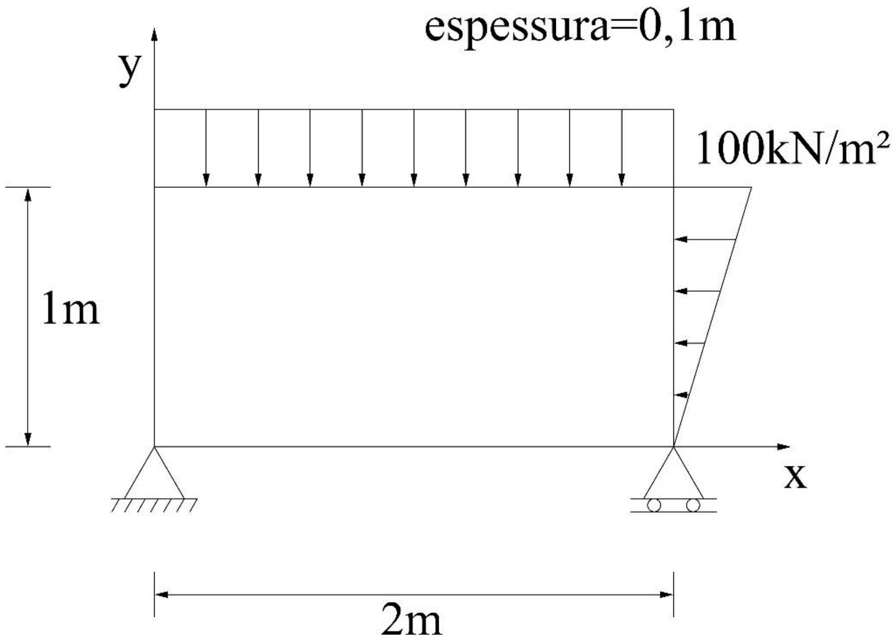
Recorde-se que $senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cos h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Sugestão: Determine a equação diferencial que $Y_n(y)$ deve satisfazer e verifique que o $Y_n(y)$ satisfaz. Utilize que:

$$\frac{P}{T} = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{P}{T}\frac{4}{n\pi}(-1)^{(n-1)/2} cos\frac{n\pi x}{2a}$$

(ii) Determine a função de tensão ϕ de Prandtl.

(iii) Considere b>a. A máxima tensão de cisalhamento ocorre no ponto onde a declividade da membrana é máxima. Isto acontece para $x = \pm a$, $y = 0$. Calcule o valor da máxima tensão de cisalhamento.

Questão 3 – Considere a chapa da figura

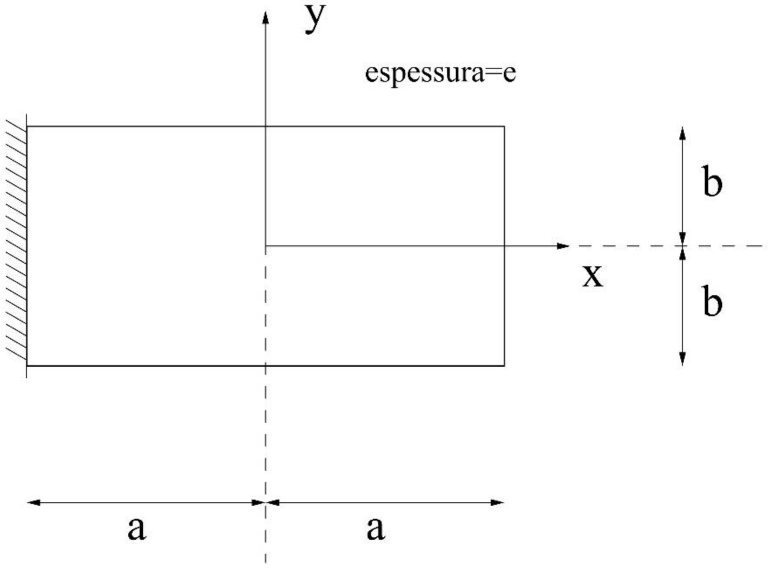


Também submetida a força de gravidade.

a) Escreva as equações de equilíbrio global da chapa.

b) Mostre que as mesmas equações de equilíbrio global são obtidas quando se considera o teorema dos deslocamentos virtuais tomando como deslocamentos virtuais os três movimentos rígidos no plano. Para a definição do movimento rígido de rotação, considere uma rotação infinitesimal em torno do ponto x=0, y=0.

Questão 4 – Considere a chapa abaixo



a) Para qual campo de forças de superfície em S_f o campo de tensões do exercício 1, item (a), é estaticamente admissível?

b) Considere o campo de deslocamentos

$$u(x,y) = (a^2 - x^2)y$$
$$v(x,y) = (a + x)y^2$$

Este campo é cinematicamente admissível? Justifique.

c) Verifique o Teorema do Trabalho para os campos de tensões e deslocamentos definidos em (a) e (b), respectivamente.