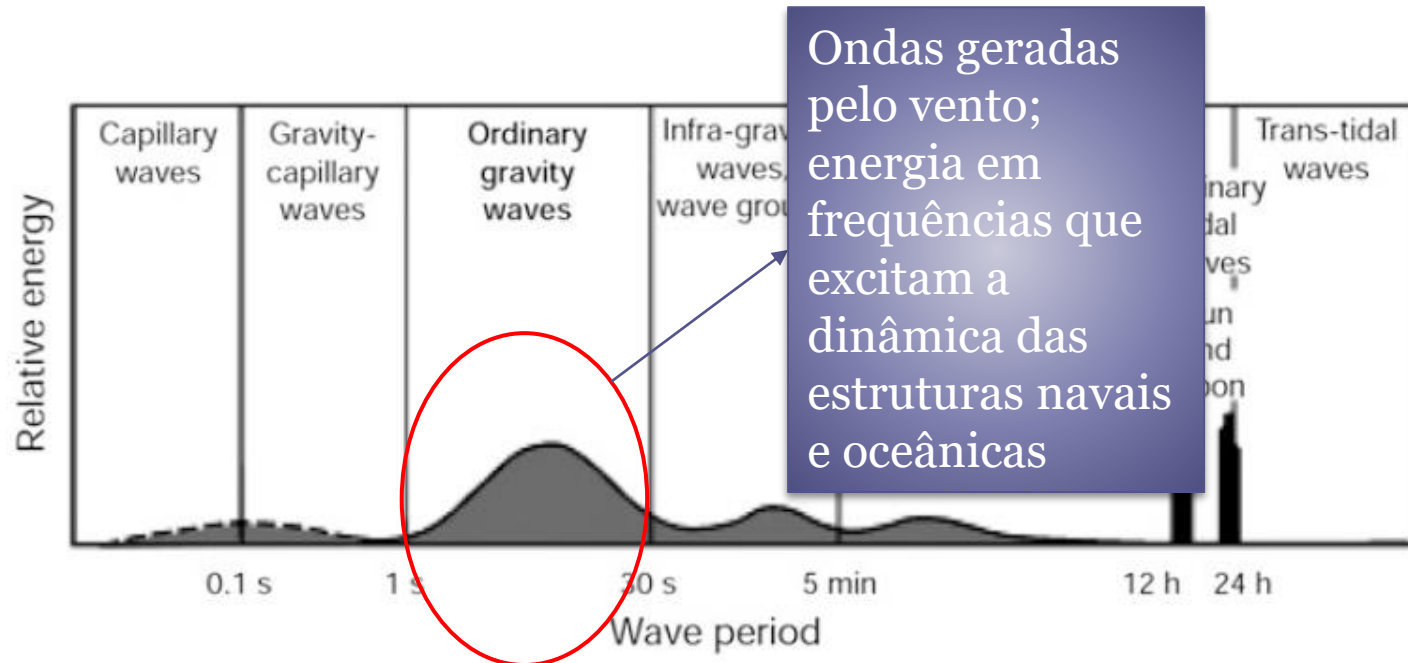


Energia Renovável do Oceano

Mecânica de ondas:

- Fundamentos: teoria linear de ondas de gravidade
- Energia de ondas e transmissão de energia

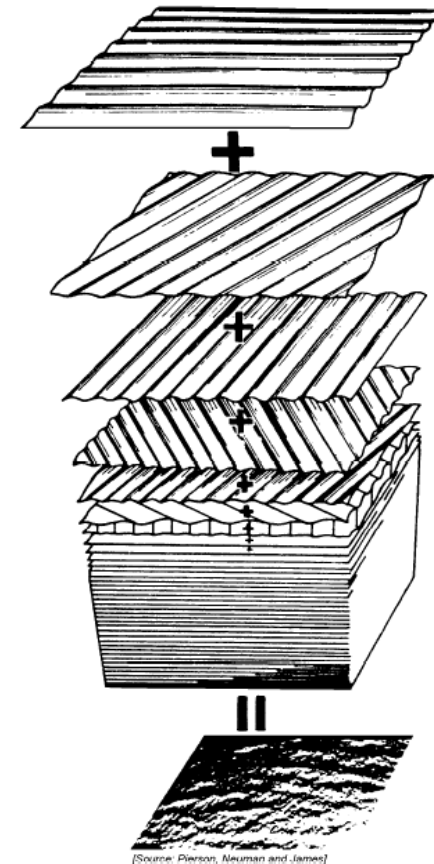
Fenômenos ondulatórios no oceano



Pecher, A. & Kofoed, J.P. (editors), Handbook of Ocean Wave Energy, Springer Open, Ocean Eng. and Oceanography Series V.7, 2017

Modelagem das ondas do mar

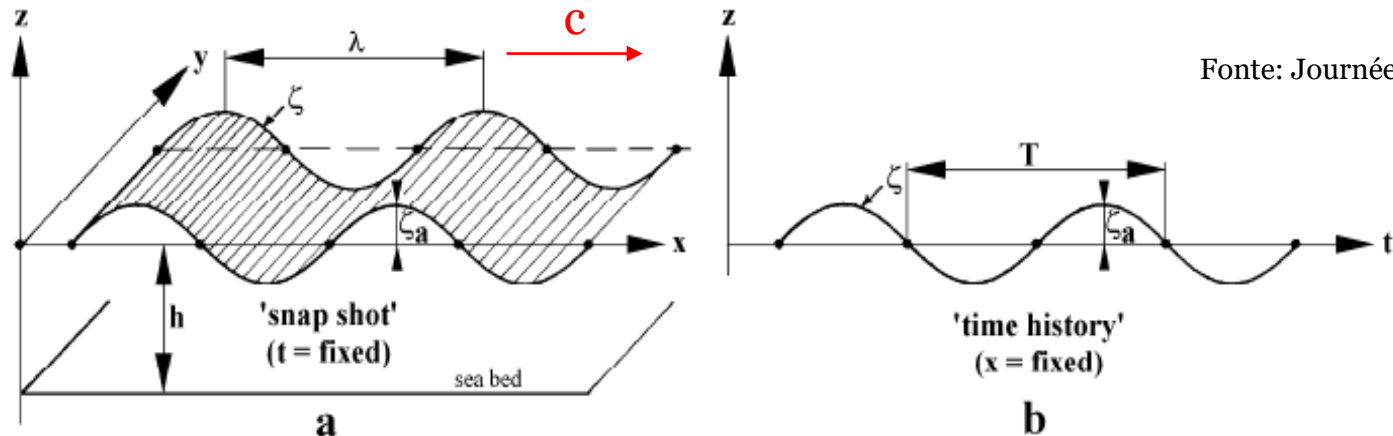
Decomposição das ondas irregulares em componentes regulares (série de Fourier)



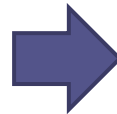
[Source: Pierson, Neuman and James]

A onda elementar

Onda plana progressiva e **regular** (amplitude, frequência e direção constantes)



- Parâmetros característicos:
 - Amplitude (m): A
 - Comprimento de onda (m): λ
 - Período de oscilação (s): T



- Número de onda (rad/m):
 $k = 2\pi/\lambda$
- Frequência angular(rad/s):
 $\omega = 2\pi/T$
- Velocidade de fase (m/s):
 $c = \lambda/T$
- Declividade de onda (rad):
 $\varepsilon = A/\lambda, kA, \dots$

O problema hidrodinâmico

Objetivo: determinar o escoamento associado à onda regular

Sabe-se que os efeitos de dissipação interna no escoamento da onda são pouco relevantes, o que justifica a adoção de um modelo de escoamento potencial:

$$\nabla \times \vec{v}(x, z, t) = 0$$

$$\vec{v}(x, z, t) = \nabla \phi(x, z, t)$$

Buscam-se:

$$\phi(x, z, t) = \phi(x, z, t; A, \lambda, T)$$

$$\zeta(x, t) = \zeta(x, t; A, \lambda, T)$$

Problema de Valor de Contorno

$$\nabla^2 \phi(x, z, t) = 0 \quad \text{Continuidade, Laplace}$$

Considerando as condições de contorno adequadas na fronteira:

1. **No fundo:** $z = -h$

$$\vec{v}(x, z, t) \cdot \vec{n}(x, z, t) = \nabla \phi(x, z, t) \cdot \vec{n}(x, z, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z, t) = 0$$

p/ $z = -h$

2. **Na superfície-livre:** $z = \zeta(x, t)$



Problema de Valor de Contorno

Ao envolver $\phi(x, z, t)$ e $\zeta(x, t)$, necessitaremos duas condições na superfície-livre para garantir a unicidade da solução:

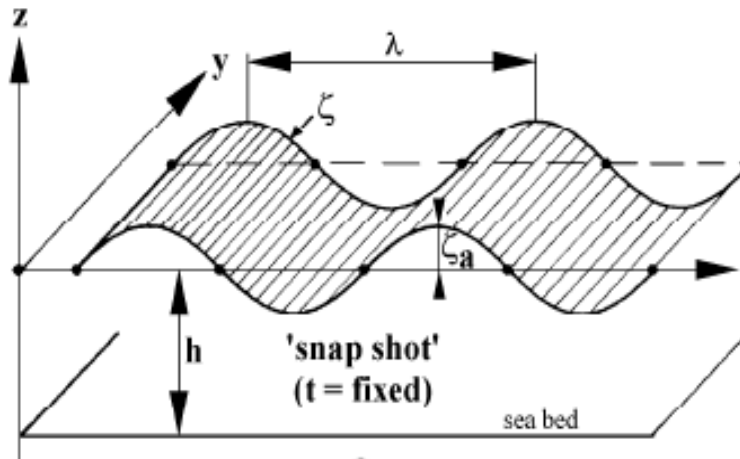
i) Condição dinâmica:

Pressão é constante na superfície-livre

$$p(x, \zeta(x, t), t) = p_{ATM} = 0$$

ii) Condição cinemática:

Compatibilidade entre a velocidade da fronteira $z = \zeta(x, t)$ e a velocidade do fluido $\nabla\phi(x, z, t)$



Problema de Valor de Contorno

A dedução da expressão matemática da condição dinâmica decorre do emprego da equação de Bernoulli:

$$\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) + p + \rho g z = C(t)$$

Observação:

Notar que, aqui, a constante $C(t)$ pode ser incorporada ao potencial, pois o mesmo é sempre definido a menos de uma constante:

$$\vec{v}(x, z, t) = \nabla \phi(x, z, t) = \nabla \left(\phi(x, z, t) + \int_t C(t) dt \right)$$

Então, é mais conveniente:

$$\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) + p + \rho g z = 0$$

Problema de Valor de Contorno

Então, temos: $p(x, \zeta(x, t), t) = p_{ATM} = 0$ em $z = \zeta(x, t)$

$$\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) + \rho g \zeta(x, t) = 0$$

$$\zeta(x, t) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right)$$

p/ $z = \zeta(x, t)$

Problema de Valor de Contorno

Para a condição cinemática, podemos pensar em termos Lagrangeanos a trajetória de uma partícula de fluido na superfície-livre: $\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{z}(\mathbf{t})$

Recorremos, então, à seguinte hipótese: $z(t) = \zeta(x(t), t)$

Partícula permanece na superfície-livre (sistema material invariante)

para escrever:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \zeta(x(t), t) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

e impor:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned}$$



$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

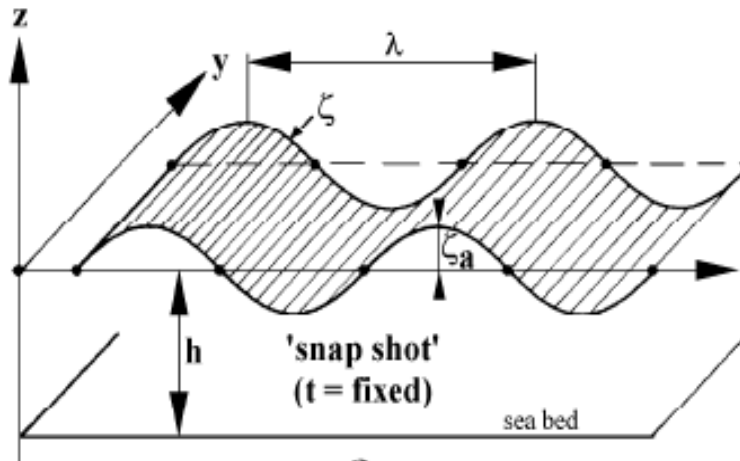
p/ $z = \zeta(x, t)$

Problema de Valor de Contorno

Em resumo: Determinar $\phi(x, z, t)$ e $\zeta(x, t)$, tal que:

$$\nabla^2 \phi(x, z, t) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z, t) = 0 \quad \text{p/ } z = -h$$



$$\zeta(x, t) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{p/ } z = \zeta(x, t)$$

Condições **não-lineares** aplicadas em fronteira não conhecida *a priori*

Problema de Valor de Contorno

Questão: Há condições favoráveis para simplificar (*linearizar*) o modelo matemático?

A resposta depende de um conhecimento prévio da física do problema do qual estamos tratando

O que sabemos a priori?

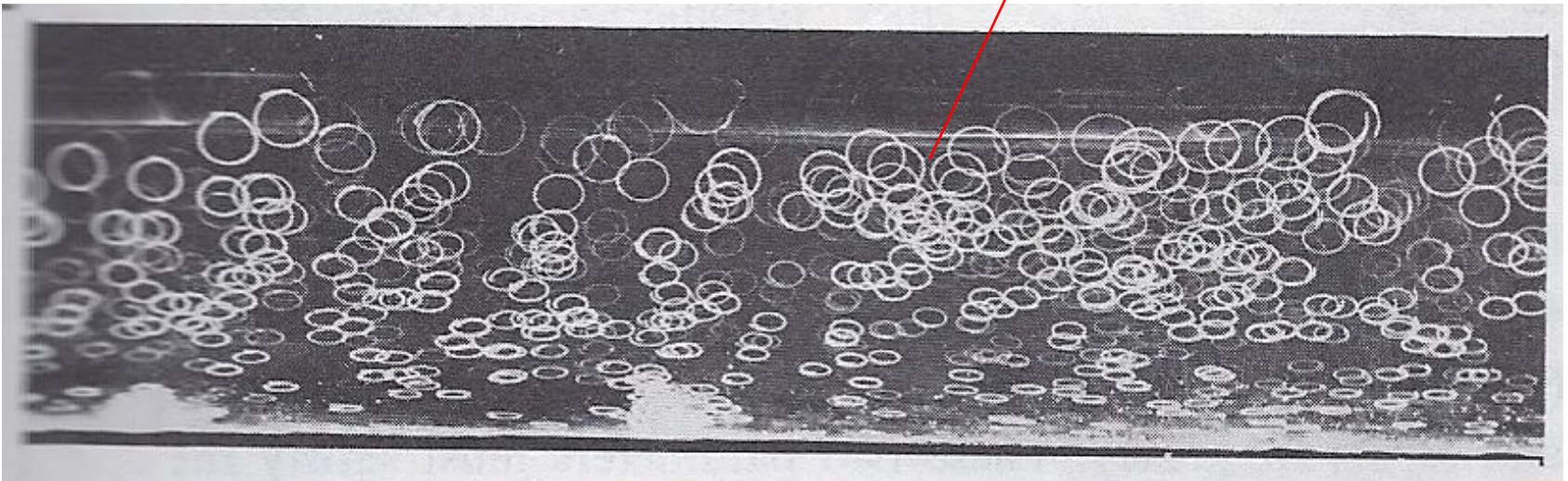
Problema de Valor de Contorno

$$\zeta(x, t) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right)$$

$$v \propto \frac{A}{T}$$



$$\phi \propto \frac{A\lambda}{T}$$



$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

fonte: Newman, J.N., Marine Hydrodynamics (1977)

Problema de Valor de Contorno

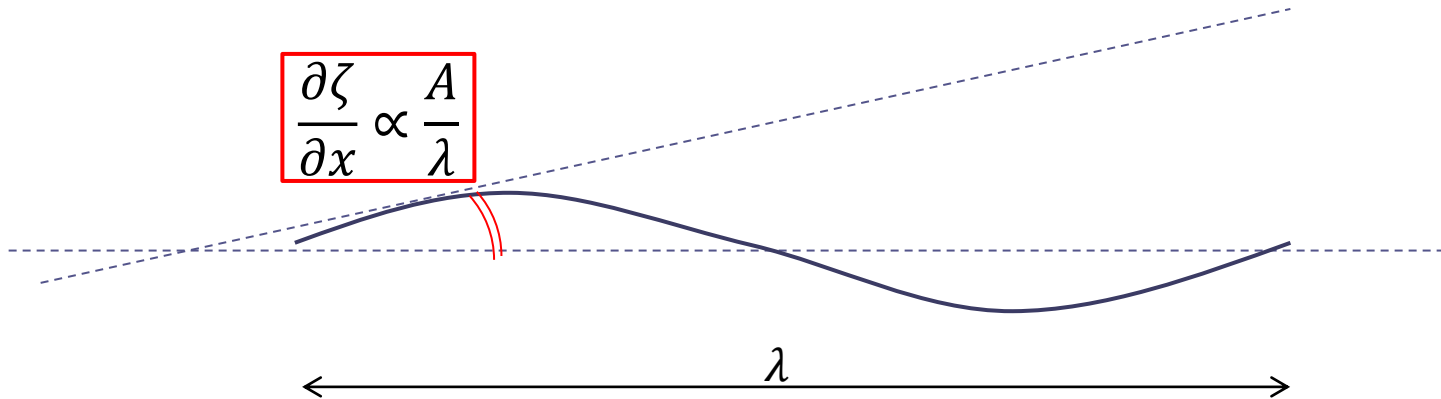
$$\zeta(x, t) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right)$$

$$v \propto \frac{A}{T}$$



$$\phi \propto \frac{A\lambda}{T}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} \propto \frac{A}{\lambda}$$



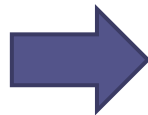
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Problema de Valor de Contorno

Então:

$$\frac{\nabla \phi \cdot \nabla \phi}{\frac{\partial \phi}{\partial t}} \propto \frac{A}{\lambda}$$

$$\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial z}} \propto \frac{A}{\lambda}$$



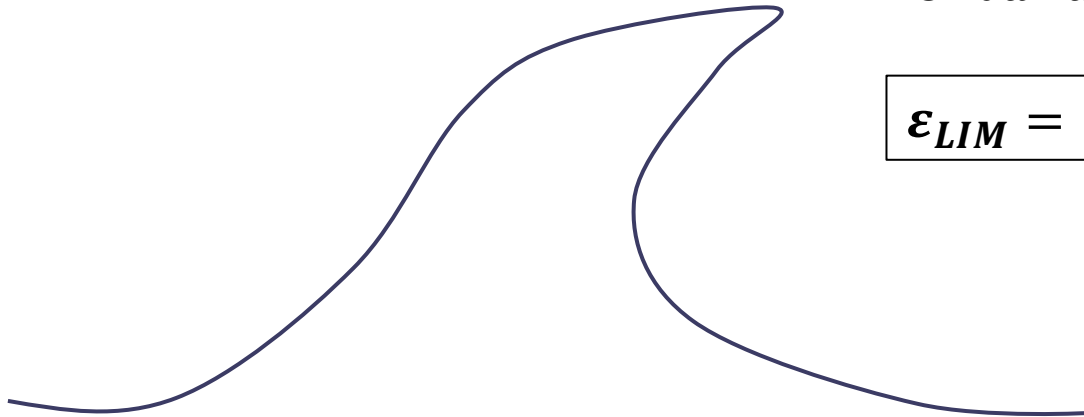
A *declividade* da onda ($\epsilon = A/\lambda$, kA ,..) é um parâmetro fundamental para a simplificação

O problema em diferentes ordens de magnitude

E o parâmetro kA é sabidamente pequeno, dado que está associado à *estabilidade* da onda progressiva

Onda na iminência de quebrar:

$$\varepsilon_{LIM} = (A/\lambda)_{LIM} \cong 0.07 \ll 1$$



Problema de Valor de Contorno

Supondo $kA \ll 1$:

$$\nabla^2 \phi(x, z, t) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z, t) = 0 \quad \text{p/ } z = -h$$

$$\zeta(x, t) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

p/ $z = 0$

p/ $z = \zeta(x, t)$

O PVC Linearizado

Supondo $kA \ll 1$:

$$\nabla^2 \phi(x, z, t) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z, t) = 0 \quad \text{p/ } z = -h$$

$$\zeta(x, t) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{p/ } z = 0$$

As condições na superfície-livre foram aproximadas, e são válidas apenas para $kA \ll 1$

A Solução Linear

A solução do PVC é obtida via Método da Separação de Variáveis, e pode ser encontrada, p. ex., em *Dean & Dalrymple, Wave Mech. for Engineers and Scientists*, seção 3.4

$$\varphi(x, z, t) = \frac{gA \cosh k(z + h)}{\omega \cosh kh} \sin(kx - \omega t)$$

e:

$$\zeta(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

e:

$$k = \frac{\omega^2}{g \tanh(kh)}$$

O que a solução matemática nos conta sobre a física da onda?

Solução de onda livre LINEAR

A Mecânica das Ondas de Gravidade

- Ondas de gravidade são **ondas dispersivas**: relação não-linear entre comprimento (λ) e período (T)
- O caráter dispersivo *na onda linear* é descrito pela seguinte **relação de dispersão** :

$$k = \frac{\omega^2}{g \tanh(kh)}$$

- Portanto:

$$\lambda = \frac{gT^2 \tanh(kh)}{2\pi}$$



Ondas de **maior período**
também são ondas **mais longas**

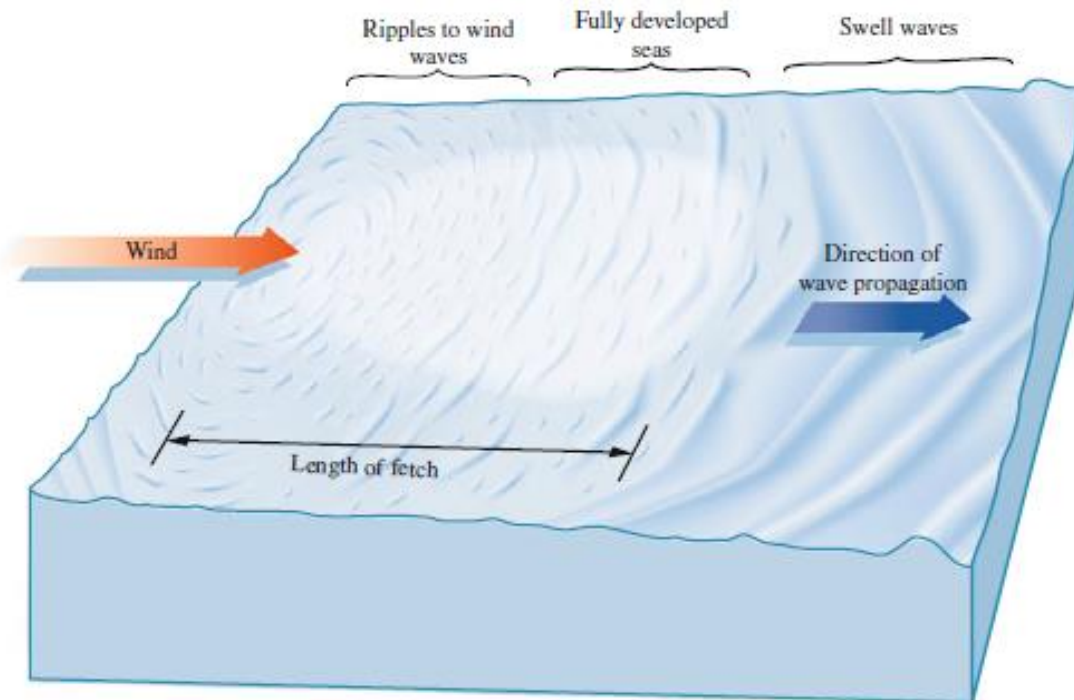
$$c = \frac{gT \tanh(kh)}{2\pi}$$



Ondas mais longas se propagam
com **maior velocidade**

A Mecânica das Ondas de Gravidade

- Isso explica o *processo de regularização* pelo qual as ondas passam ao se afastar da zona de geração: diferentes componentes de ondas avançam com diferentes celeridades



A Mecânica das Ondas de Gravidade

- As velocidades do escoamento são dadas por:

$$\vec{v}(x, z, t) = \nabla\phi(x, z, t) = u(x, z, t)\vec{i} + w(x, z, t)\vec{k}$$

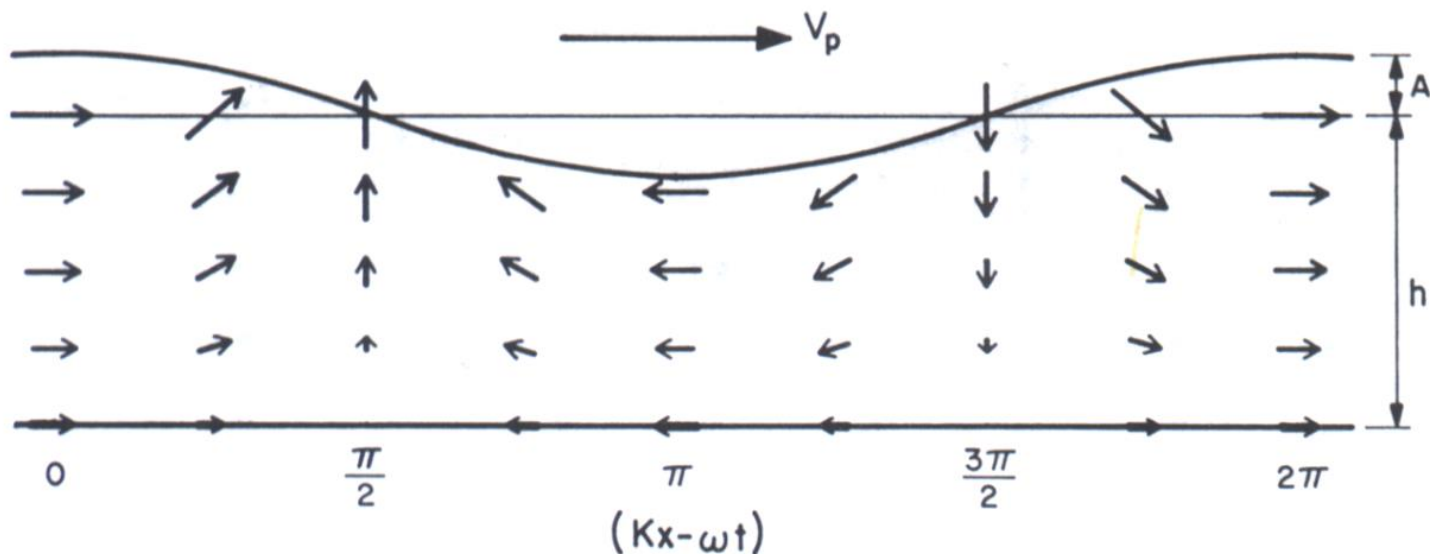
- com:

$$u(x, z, t) = \omega A \frac{\cosh k(z + h)}{\sinh(kh)} \cos(kx - \omega t)$$

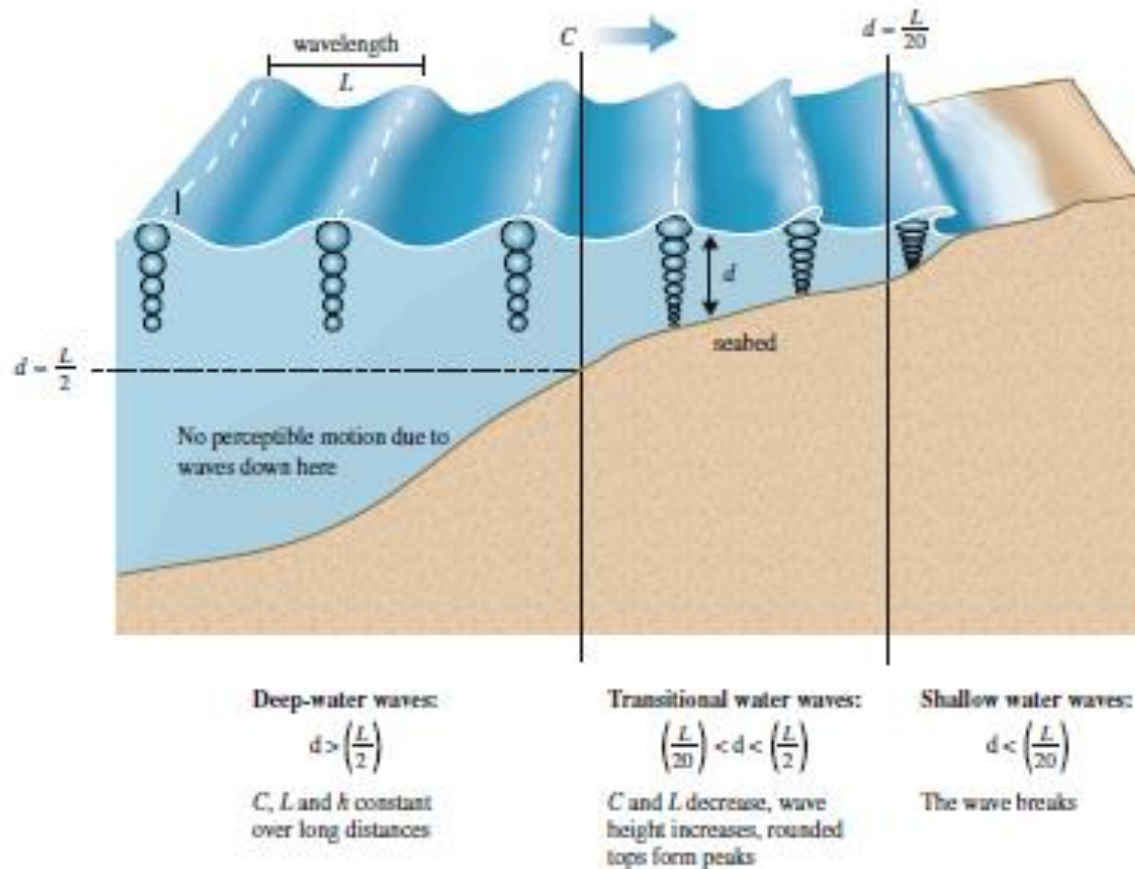
$$w(x, z, t) = \omega A \frac{\sinh k(z + h)}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t)$$

A Mecânica das Ondas de Gravidade

- Padrão do escoamento:



A Mecânica das Ondas de Gravidade



Campo de pressão

Na teoria linear, devemos desconsiderar os termos quadráticos na amplitude de ondas frente aos termos lineares.

Para a pressão, isso implica:

$$p(x, z, t) = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi \right) - \rho g z$$

$$\varepsilon = kA \ll 1$$

Campo de pressão

O campo de pressão linear do escoamento é dado por:

$$p(x, z, t) = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, z, t) - \rho g z$$

Então:

$$p(x, z, t) = \rho g A \cos(kx - \omega t) \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh} - \rho g z$$

ou ainda:

$$p(x, z, t) = \rho g \zeta(x, t) \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh} - \rho g z$$

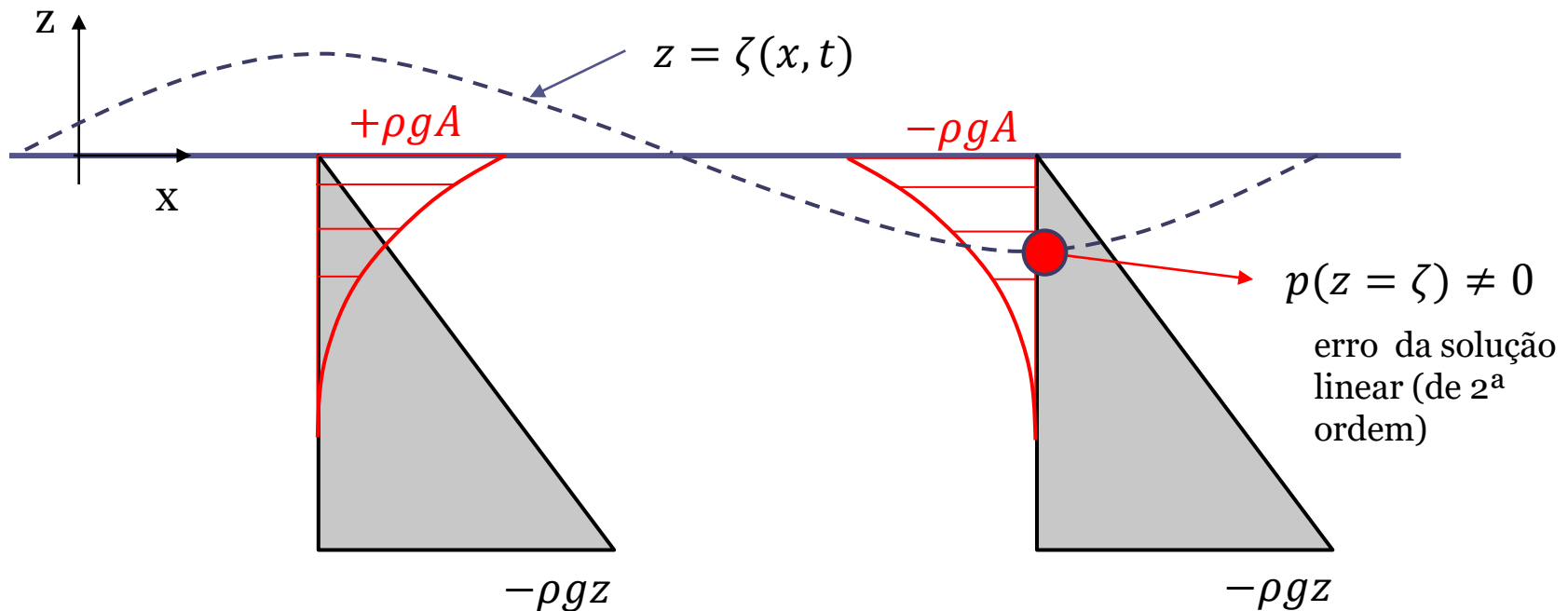
ou em águas profundas:

$$p(x, z, t) = \rho g \zeta(x, t) e^{kz} - \rho g z$$

Campo de pressão

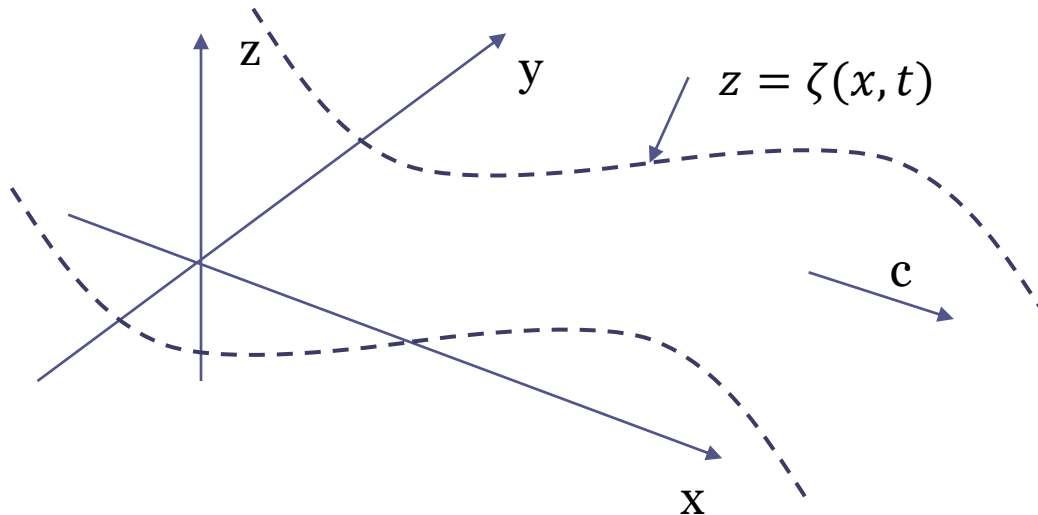
E aqui é importante interpretar corretamente o campo, observando que o mesmo é válido para $z \leq 0$:

$$p(x, z, t) = \rho g \zeta(x, t) e^{kz} - \rho g z$$



Energia média de ondas

A energia de ondas é composta por energia cinética e energia potencial do fluido:

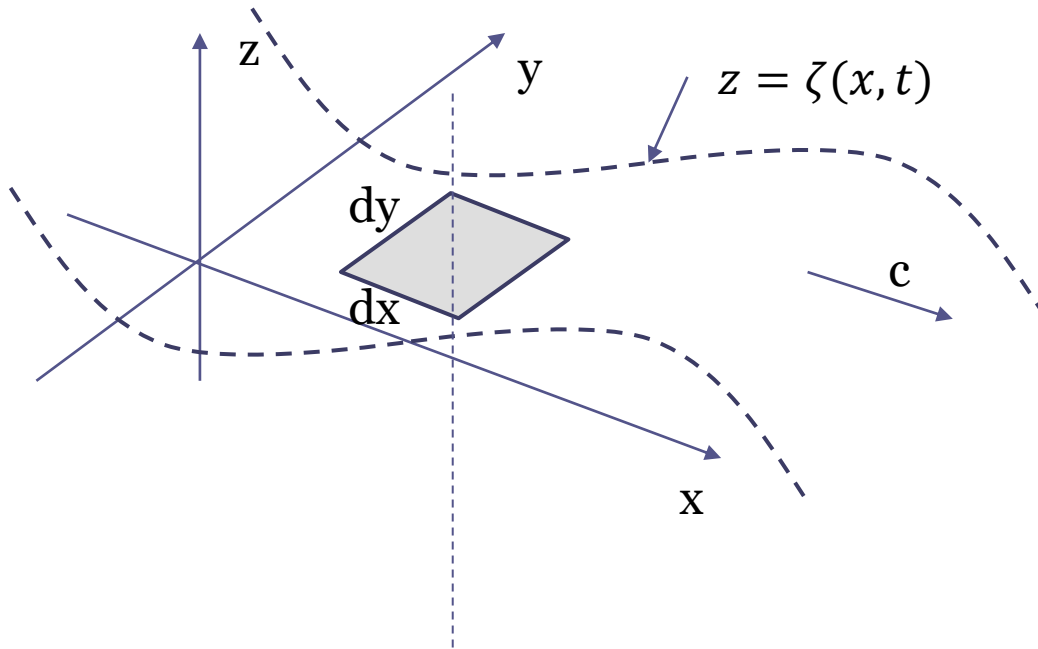


$$E(t) = K(t) + P(t)$$

Como veremos, $E(t)$ é uma quantidade de segunda-ordem, a qual derivaremos a partir da solução linear:

Energia média de ondas

Consideremos uma área elementar da superfície do mar ($dS = dxdy$) na condição de *águas profundas*:



Na coluna de seção elementar, a energia cinética será dada por:

$$K(t) = \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} \left(\frac{1}{2} \rho \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) dz$$

e a energia potencial será:

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} (\rho g z) dz$$

Energia média de ondas

Então:

$$E(t) = \frac{1}{2} \rho \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) dz + \rho g \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} (z) dz$$

$$\nabla \phi \cdot \nabla \phi = u^2(x, z, t) + w^2(x, z, t) = \omega^2 A^2 e^{2kz}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} e^{2kz} dz + \rho g \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} (z) dz$$

$$E(t) = \frac{1}{4} \rho \frac{\omega^2 A^2}{k} e^{2k\zeta(x,t)} + \frac{1}{2} \rho g \zeta^2(x,t) + \text{energia potencial que não depende da onda}$$

$$E(t) = \frac{1}{4} \rho \frac{\omega^2 A^2}{k} e^{2k\zeta(x,t)} + \frac{1}{2} \rho g \zeta^2(x,t)$$

Energia média de ondas

Mas, ainda:

$$e^{2k\zeta(x,t)} \cong 1 + 2k\zeta(x,t) + \dots$$

Então, retendo apenas termos até segunda-ordem (A^2):

$$E(t) \cong \frac{1}{4} \rho \frac{\omega^2 A^2}{k} + \frac{1}{2} \rho g \zeta^2(x, t)$$

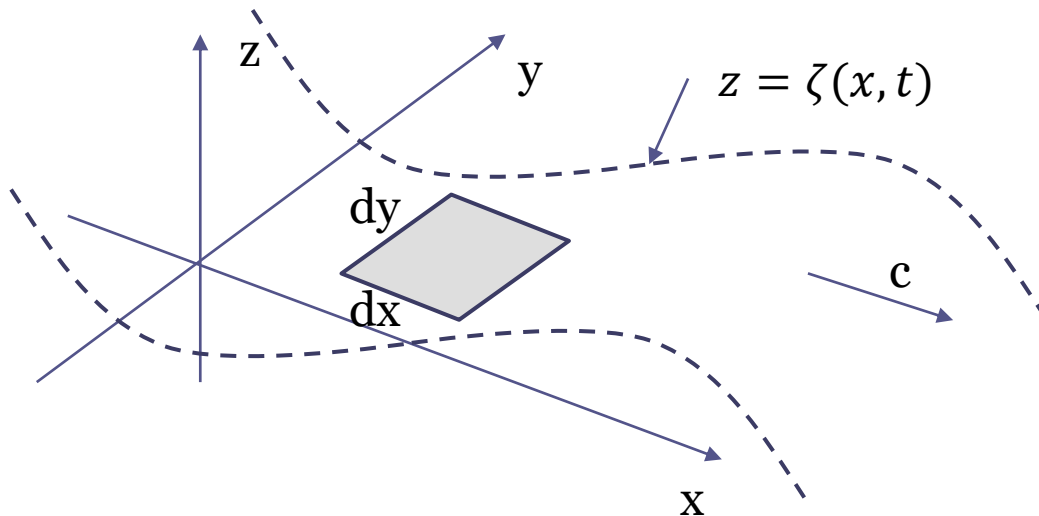
$$E(t) \cong \frac{1}{4} \rho g A^2 + \frac{1}{2} \rho g A^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Tomaremos, então, o valor médio desta energia por ciclo de onda:

$$\bar{E} = \frac{1}{4} \rho g A^2 + \frac{1}{2} \rho g A^2 \overline{\cos^2(kx - \omega t)}$$

Energia média de ondas

E, finalmente: $\bar{E} = \frac{1}{4}\rho g A^2 + \frac{1}{4}\rho g A^2 = \frac{1}{2}\rho g A^2$



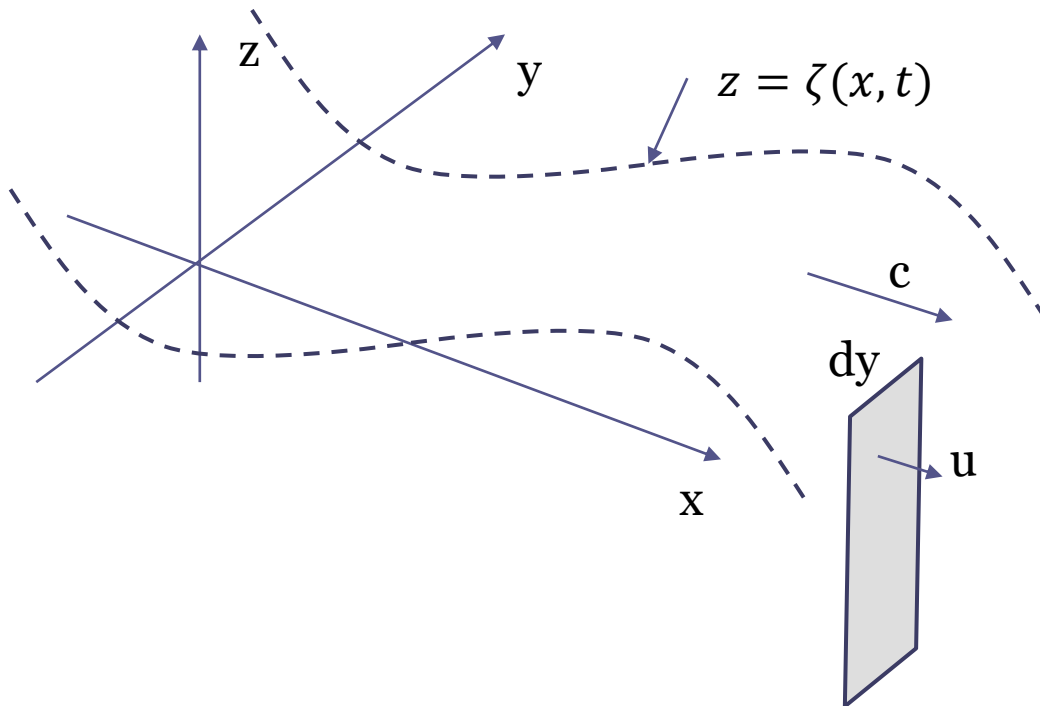
$$\bar{E} = \frac{1}{2}\rho g A^2$$

Energia média de onda
por unidade de área de
superfície do mar
(densidade de energia)
(J/m²)

Transporte de Energia

Podemos agora avaliar com que velocidade essa energia média de onda deve ser transmitida.

Consideremos, então, o fluxo de energia (potência) pela seção vertical



$$W(t) = \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} (p dz) u(x, z, t)$$

Potência por unidade de largura (em y) na seção (W/m)

Transporte de Energia

Então:

$$W(t) = \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} p(x, z, t) u(x, z, t) dz$$

e, novamente considerando águas profundas:

$$p(x, z, t) = \rho g A e^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

$$u(x, z, t) = \omega A e^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

$$W(t) = \rho g \omega A^2 \cos^2(kx - \omega t) \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} e^{2kz} dz$$

$$W(t) = \frac{1}{2} \rho g \frac{\omega}{k} A^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Transporte de Energia

E, novamente tomando o valor médio no tempo:

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \rho g \frac{\omega}{k} A^2 \overline{\cos^2(kx - \omega t)} = \frac{1}{4} \rho g A^2 \frac{\omega}{k} = \frac{1}{4} \rho g A^2 c$$

Observando, então, que o fluxo médio de energia por ciclo de onda deve ser:

$$\bar{W} = \bar{E} \cdot c_G$$

c_G : velocidade de transporte da energia média de onda

Concluimos que:

$$c_G = \frac{c}{2}$$

velocidade *de grupo* da onda linear em águas profundas

Transporte de Energia

Para o caso mais geral de profundidade finita e constante h , mostra-se que (verificar):

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \rho g A^2$$

$$c_G = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right)$$

varia entre zero ($kh \rightarrow \infty$) e um ($kh \rightarrow 0$)

Portanto:

$$\frac{c}{2} \leq c_G \leq c$$

águas profundas

→ águas rasas ($c = \sqrt{gh}$)

O conceito de grupo de ondas

Interpretação cinemática: dada por Stokes no séc. XIX, a partir da modelagem do comportamento de uma *onda de swell*

Consideremos, então, duas ondas regulares com mesma amplitude (A) e frequências próximas $(\omega + \delta\omega)$ e $(\omega - \delta\omega)$ que se propagam no mesmo sentido.

A elevação resultante é dada por:

$$\zeta(x, t) = A \cos[(k + \delta k)x - (\omega + \delta\omega)t] + A \cos[(k - \delta k)x - (\omega - \delta\omega)t]$$

ou:

$$\zeta(x, t) = 2A \cos(\delta kx - \delta\omega t) \cos(kx - \omega t)$$

Modulação(envoltória)
 $\eta(x, t)$

O conceito de grupo de ondas

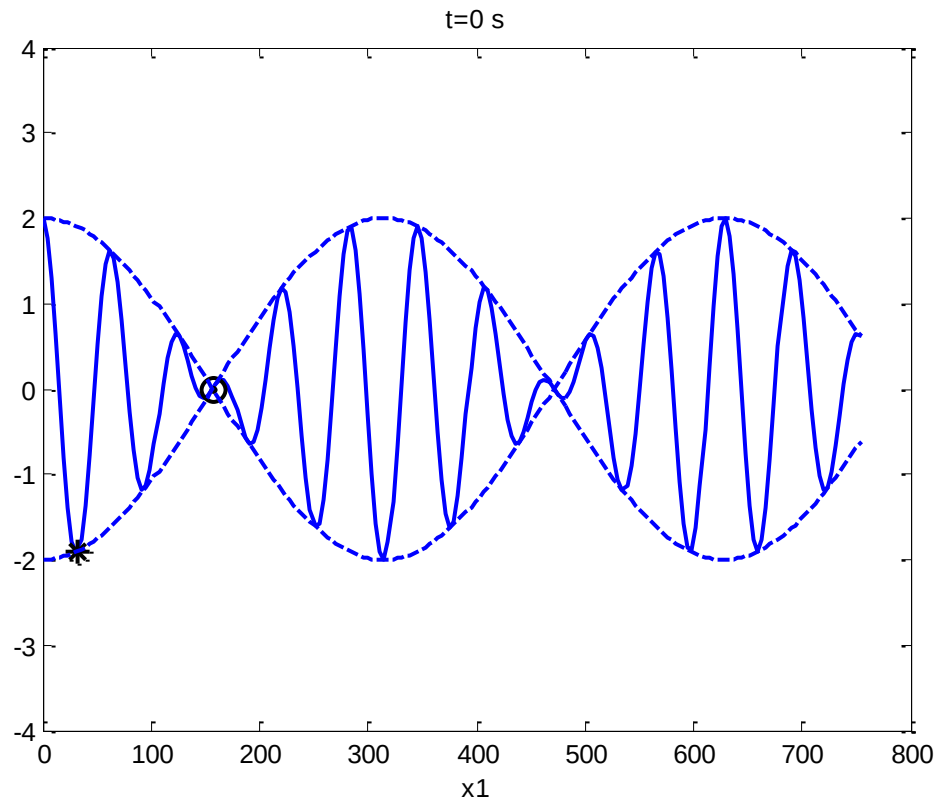
Mas, devemos perceber que a envoltória $\eta(x, t)$ também é, ela própria, uma onda *progressiva*, com:

$$\lambda_{\eta} = \frac{2\pi}{\delta k} \gg \lambda$$

$$c_{\eta} = \frac{\delta \omega}{\delta k}$$

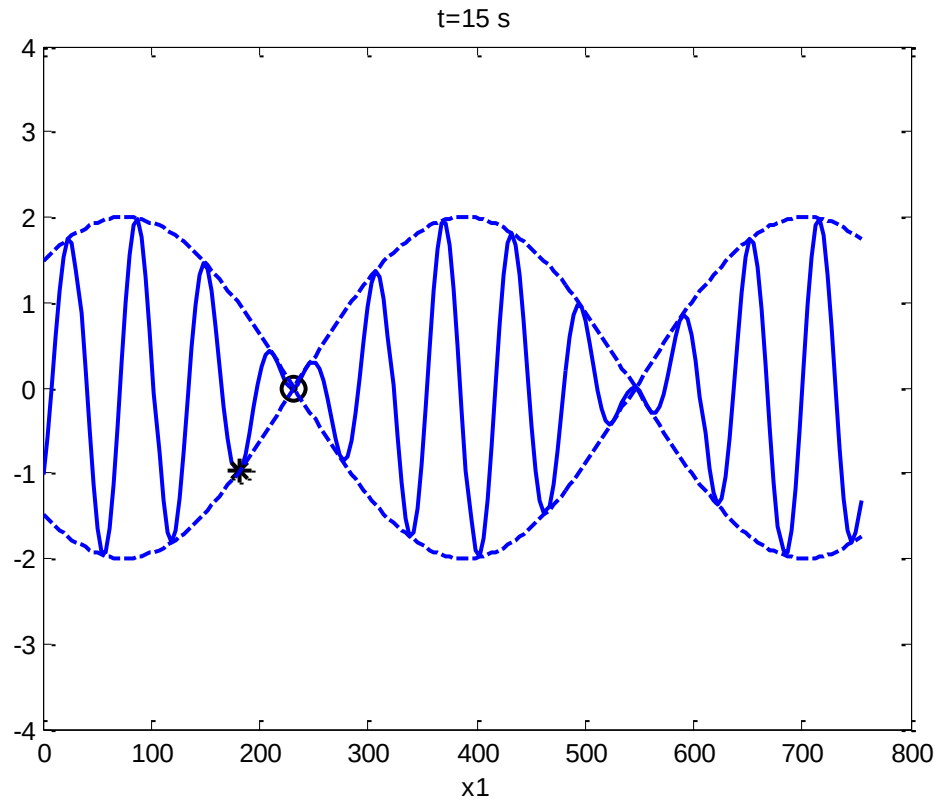
O processo de propagação dessa onda pode então ser ilustrado visualmente:

O conceito de grupo de ondas



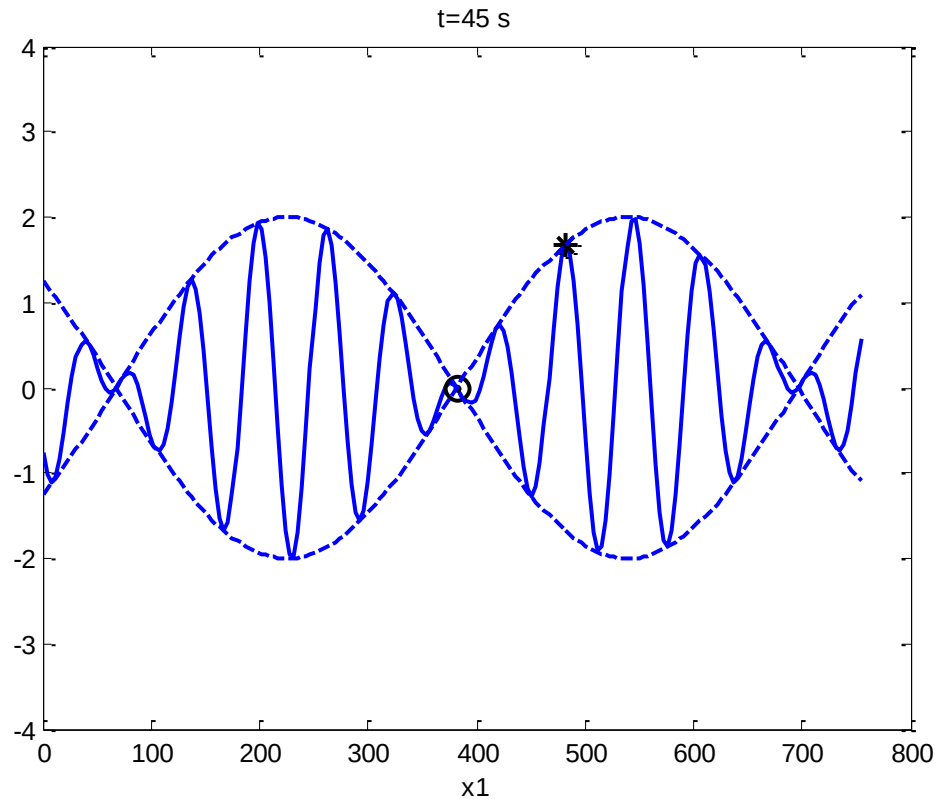
Velocidade da onda $c=\omega/k$ (*) e velocidade da envoltória $c_\eta = \delta\omega/\delta k$ (o)

O conceito de grupo de ondas



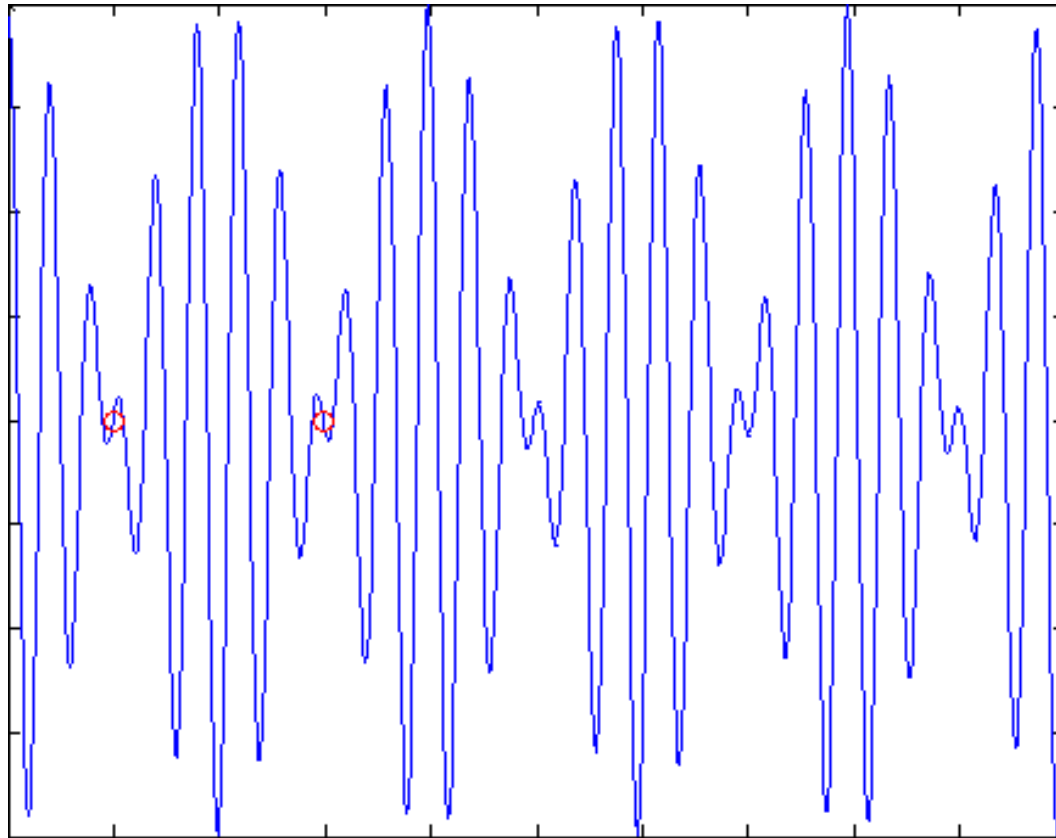
Velocidade da onda $c=\omega/k$ (*) e velocidade da envoltória $c_\eta = \delta\omega/\delta k$ (o)

O conceito de grupo de ondas



Velocidade da onda $c=\omega/k$ (*) e velocidade da envoltória $c_\eta = \delta\omega/\delta k$ (o)

O conceito de grupo de ondas



Velocidade da onda $c = \omega/k$ (*) e velocidade da envoltória $c_g = \delta\omega/\delta k$ (o)

O conceito de grupo de ondas

No caso em que $\delta\omega \rightarrow 0$, recuperamos a situação de uma *onda regular*, e então:

$$\lambda_\eta \rightarrow \infty$$

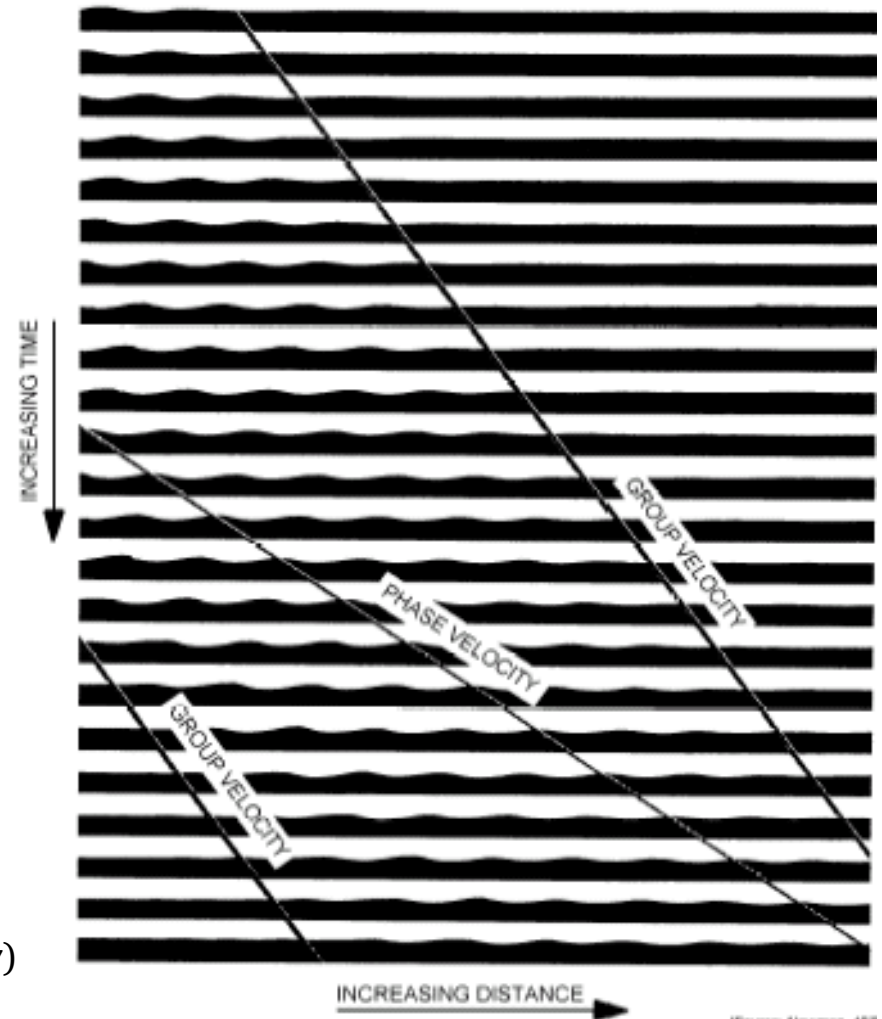
$$c_\eta = \frac{d\omega}{dk} = c_G$$

De fato, no caso de águas profundas, p. ex.:

$$k = \frac{\omega^2}{g} \quad \longrightarrow \quad \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \frac{g}{\omega} = \frac{c}{2}$$

O conceito de grupo de ondas

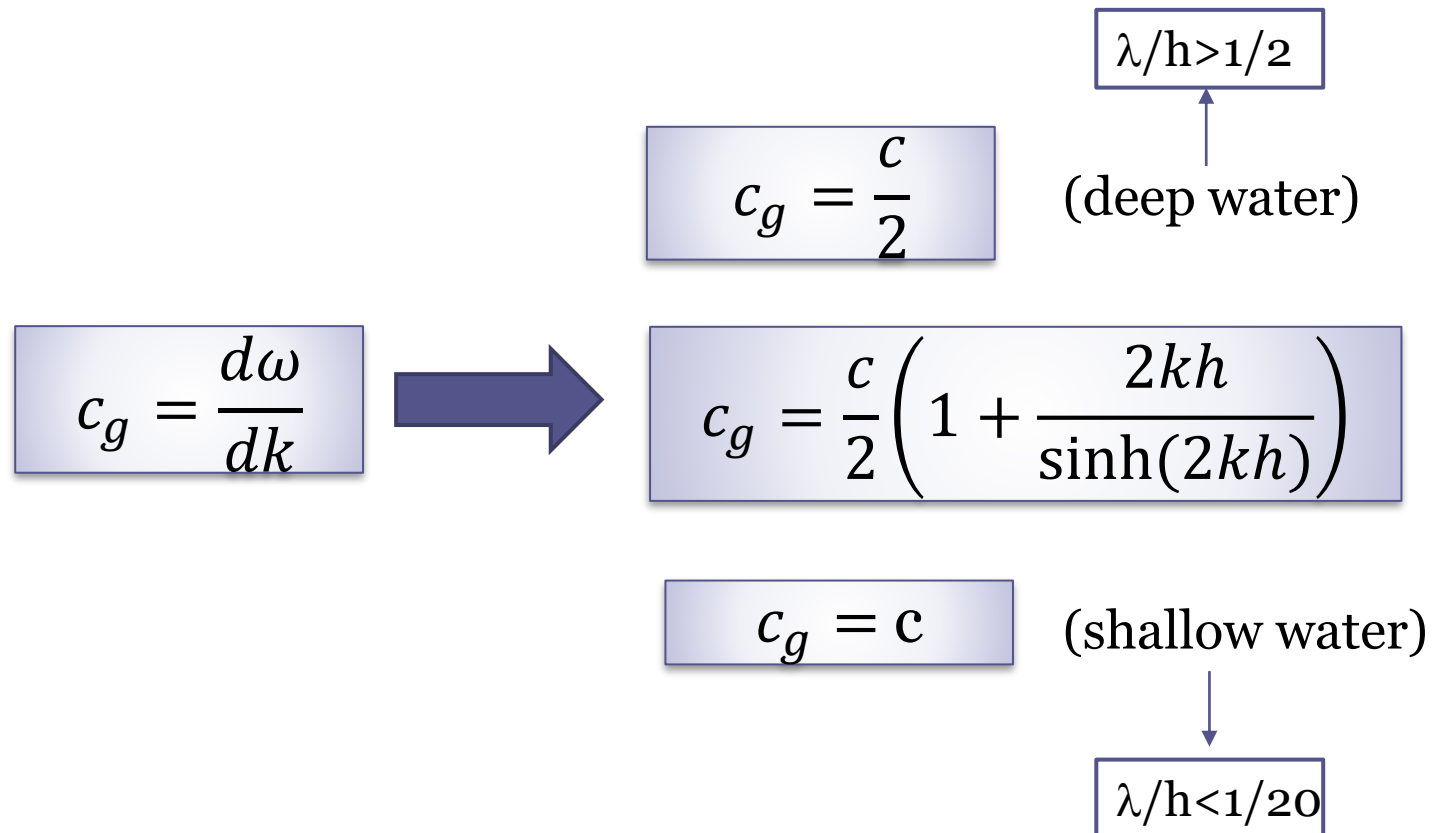
O processo da evolução do grupo de ondas pode ser facilmente identificado em um canal de ondas, onde a frente e o final do grupo são *observáveis*:



Fonte: Newman (1977)

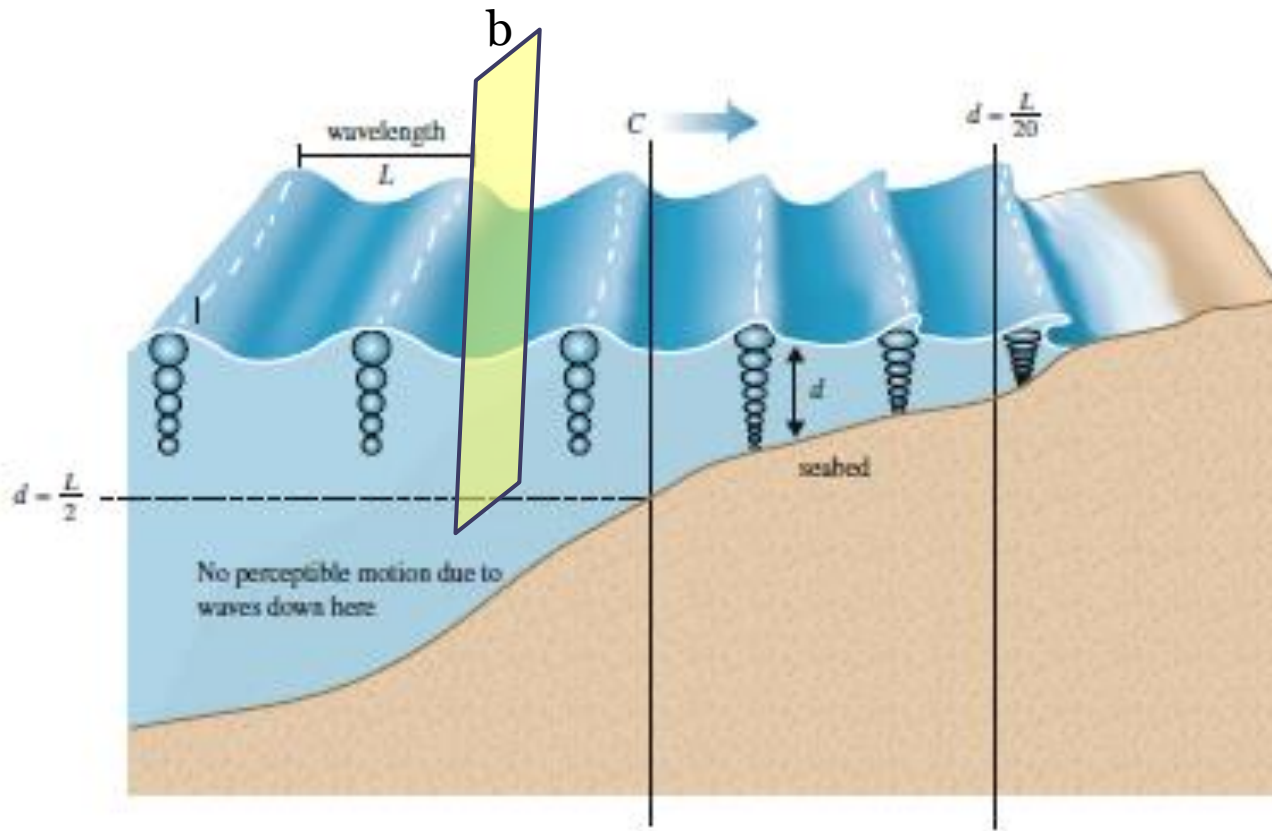
Potência disponível

- Vimos, então, que a velocidade de transmissão da energia média é :



Potência disponível

- e, considerando uma **largura b perpendicular à direção de onda**:



Potência disponível

- a *potência média disponível* na seção é dada por:

$$power = \frac{1}{2} \rho g A^2 c_g b \quad (\text{W})$$

Máxima potência que pode ser extraída por um conversor em uma largura de b metros de crista de onda

Potência disponível

- **Exemplo:** onda regular *em águas profundas* com amplitude **A=1m** e período **T=10s**:

$$\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$\bar{E} = 1/2 \rho g A^2 = 5,0 \text{ kJ/m}^2$$

$$c_g = 1/2 c = 1/2 (gT/2\pi) = 7,81 \text{ m/s}$$

$$\text{power/m} = \frac{1}{2} \rho g A^2 c_g = \mathbf{39,25 \text{ (kW/m)}}$$