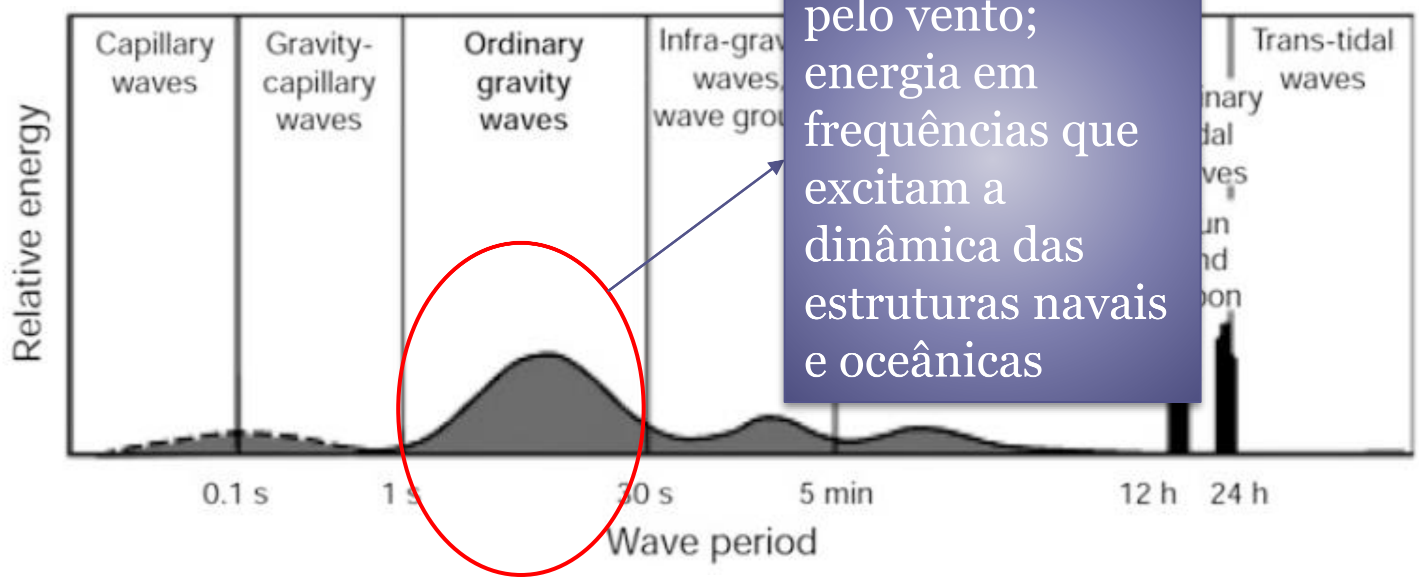
Energia Renovável do Oceano

Mecânica de ondas:

- Fundamentos: teoria linear de ondas de gravidade
- Energia de ondas e transmissão de energia

Fenômenos ondulatórios no oceano

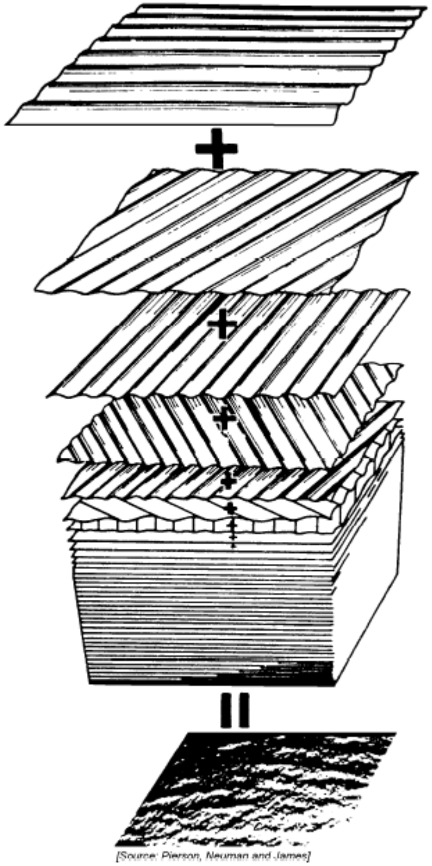
Ondas geradas pelo vento; energia em frequências que excitam a dinâmica das estruturas navais e oceânicas



Pecher, A. & Kofoed, J.P. (editors), Handbook of Ocean Wave Energy, Springer Open, Ocean Eng. and Oceanography Series V.7, 2017

Modelagem das ondas do mar

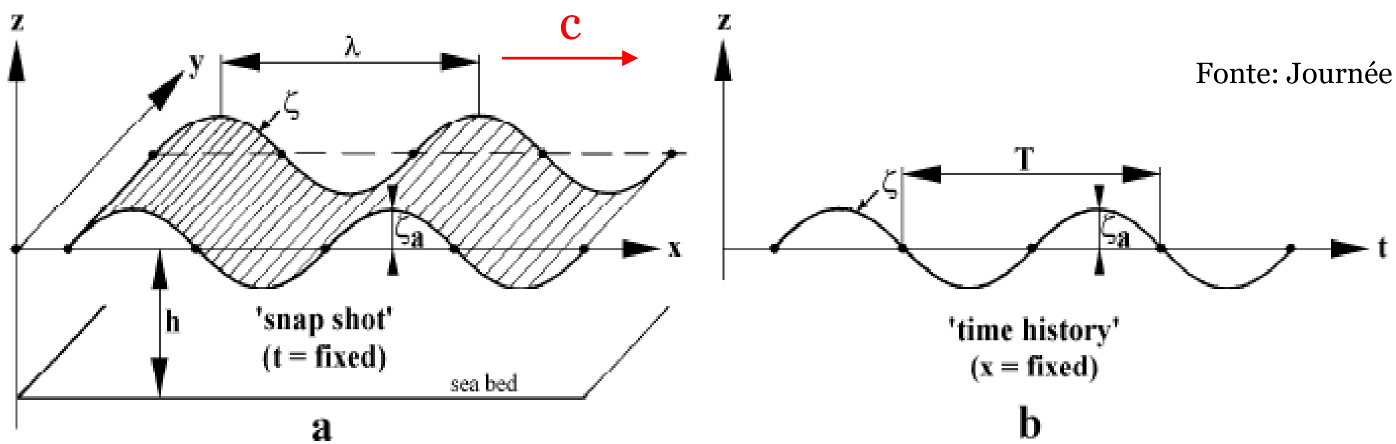
Decomposição das ondas irregulares em componentes regulares (série de Fourier)



Fonte: Journée & Massie (2001)

A onda elementar

Onda plana progressiva e **regular** (amplitude, frequência e direção constantes)



Fonte: Journée & Massie (2001)

- Parâmetros característicos:
  - Amplitude (m): A
  - Comprimento de onda (m): λ
  - Período de oscilação (s): T

- Número de onda (rad/m):
  $\mathbf{k = 2\pi/\lambda}$
- Frequência angular(rad/s):
  $\mathbf{\omega = 2\pi/T}$
- Velocidade de fase (m/s):
  $\mathbf{c = \lambda/T}$
- Declividade de onda (rad):
  $\varepsilon = A/\lambda$, **kA,...**

O problema hidrodinâmico

Objetivo: determinar o escoamento associado à onda regular

Sabe-se que os efeitos de dissipação interna no escoamento da onda são pouco relevantes, o que justifica a adoção de um modelo de escoamento potencial:

$$\nabla \times \vec{v}(x, z, t) = 0$$

$$\boxed{\vec{v}(x, z, t) = \nabla\phi(x, z, t)}$$

Buscam-se:

$$\phi(x, z, t) = \phi(x, z, t; A, \lambda, T)$$

$$\zeta(x, t) = \zeta(x, t; A, \lambda, T)$$

Problema de Valor de Contorno

$$\nabla^2 \phi(x, z, t) = 0$$ Continuidade, Laplace

Considerando as condições de contorno adequadas na fronteira:

1. No fundo: $z = -h$

$$\vec{v}(x, z, t) \cdot \vec{n}(x, z, t) = \nabla\phi(x, z, t).\vec{n}(x, z, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z, t) = 0$$

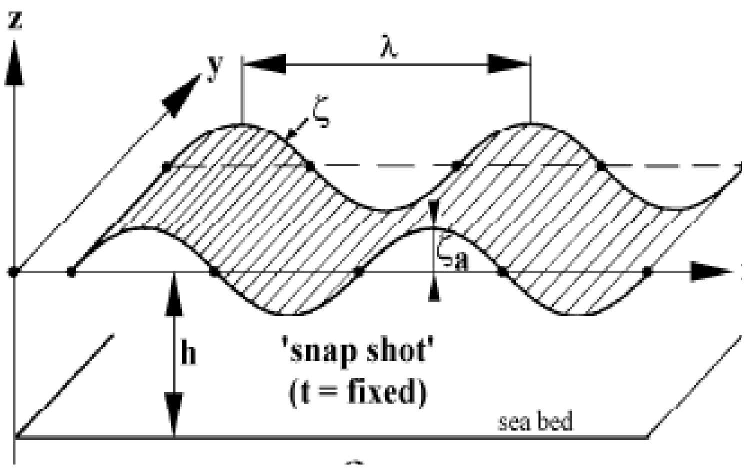
p/ $z = -h$

2. Na superfície-livre: $z = \zeta(x, t)$

$\boxed{?}$

Problema de Valor de Contorno

Ao envolver $\phi(x,z,t)$ e $\zeta(x,t)$, necessitaremos duas condições na superfície-livre para garantir a unicidade da solução:



i) Condição dinâmica:

Pressão é constante na superfície-livre

$$p(x,\zeta(x,t),t) = p_{ATM} = 0$$

ii) Condição cinemática:

Compatibilidade entre a velocidade da fronteira $z = \zeta(x,t)$ e a velocidade do fluido $\nabla\phi(x,z,t)$

Problema de Valor de Contorno

A dedução da expressão matemática da condição dinâmica decorre do emprego da equação de Bernoulli:

$$\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla\phi.\nabla\phi\right)+p+\rho g z=C(t)$$

Observação:
Notar que, aqui, a constante C(t) pode ser incorporada ao potencial, pois o mesmo é sempre definido a menos de uma constante:

$$\vec{v}(x,z,t)=\nabla\phi(x,z,t)=\nabla(\phi(x,z,t)+\int_t \; C(t)dt)$$

Então, é mais conveniente:

$$\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla\phi.\nabla\phi\right)+p+\rho g z=0$$

Problema de Valor de Contorno

Então, temos: $p(x,\zeta(x,t),t) = p_{ATM} = 0$ em z= $\zeta(x,t)$

$$\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi.\nabla\phi\right) + \rho g\zeta(x,t) = 0$$

$$\boxed{\zeta(x,t) = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi.\nabla\phi\right)}$$

p/ z= $\zeta(x,t)$

Problema de Valor de Contorno

Para a condição cinemática, podemos pensar em termos Lagrangeanos a trajetória de uma partícula de fluido na superfície-livre: **x(t), z(t)**

Recorremos, então, à seguinte hipótese: $z(t) = \zeta(x(t), t)$

Partícula permanece na superfície-livre (sistema material invariante)

para escrever:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\zeta(x(t), t) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

e impor:

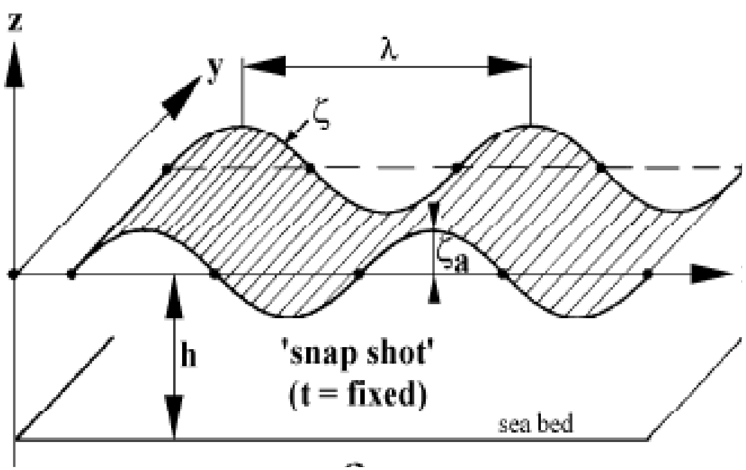
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}}$$

p/ z= $\zeta(x, t)$

Problema de Valor de Contorno

Em resumo: Determinar $\phi(x,z,t)$ e $\zeta(x,t)$, tal que:



$$\nabla^2\phi(x,z,t) = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(x,z,t) = 0 \qquad \text{p/ } z = -h$$

$$\zeta(x,t) = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi.\nabla\phi\right)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad \text{p/ z}= \zeta(x,t)$$

Condições **não-lineares** aplicadas em fronteira não conhecida *a priori*

Problema de Valor de Contorno

Questão: Há condições favoráveis para simplificar (*linearizar*) o modelo matemático?

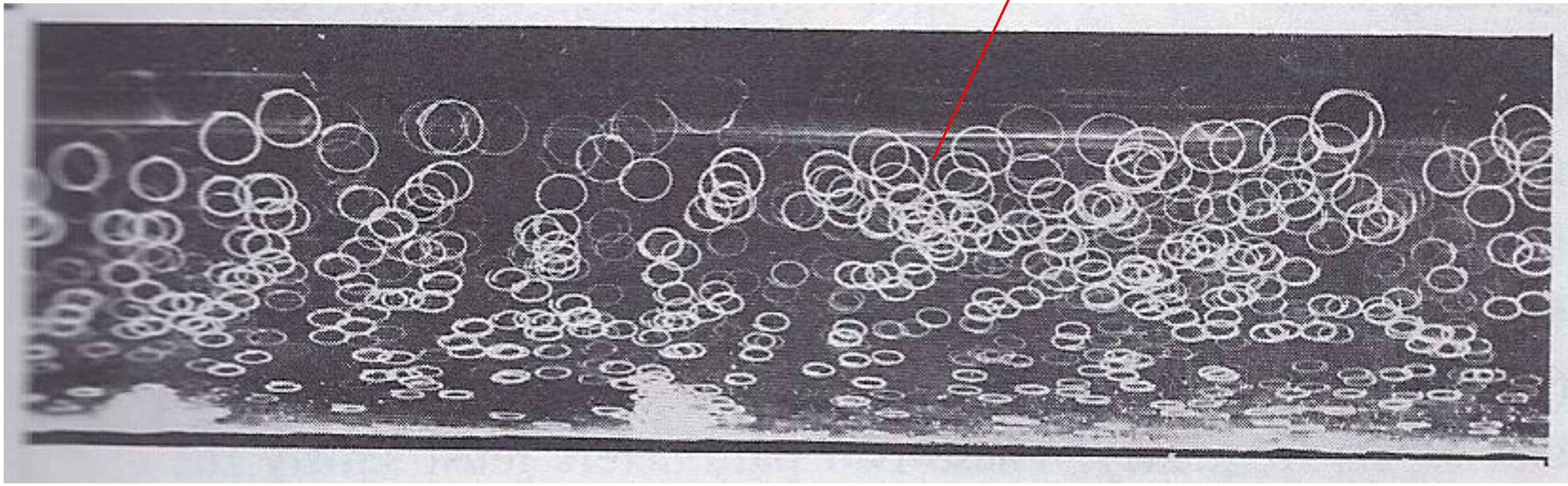
A resposta depende de um conhecimento prévio da física do problema do qual estamos tratando

O que sabemos a priori?

Problema de Valor de Contorno

$$\boxed{v \propto \frac{A}{T}} \Rightarrow \boxed{\phi \propto \frac{A\lambda}{T}}$$

$$\zeta(x,t) = -\frac{1}{g}\left(\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t}} + \frac{1}{2}\boxed{\nabla\phi}.\boxed{\nabla\phi}\right)$$



fonte: Newman, J.N., Marine Hydrodynamics (1977)

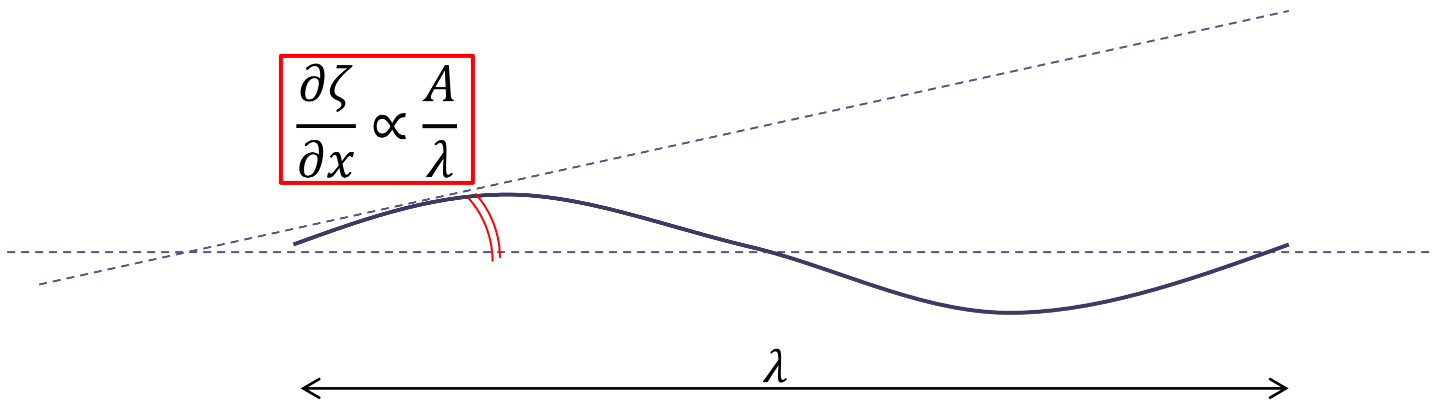
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x,t) = \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial z}} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial x}}$$

Problema de Valor de Contorno

$$\zeta(x,t) = -\frac{1}{g}\left(\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial t}} + \frac{1}{2}\boxed{\nabla\phi}.\boxed{\nabla\phi}\right)$$

$$\boxed{v \propto \frac{A}{T}} \Rightarrow \boxed{\phi \propto \frac{A\lambda}{T}}$$

$$\boxed{\frac{\partial\zeta}{\partial x} \propto \frac{A}{\lambda}}$$



$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}(x,t) = \boxed{\frac{\partial\phi}{\partial z}} - \boxed{\frac{\partial\zeta}{\partial x}}\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial x}}$$

Problema de Valor de Contorno

Então:

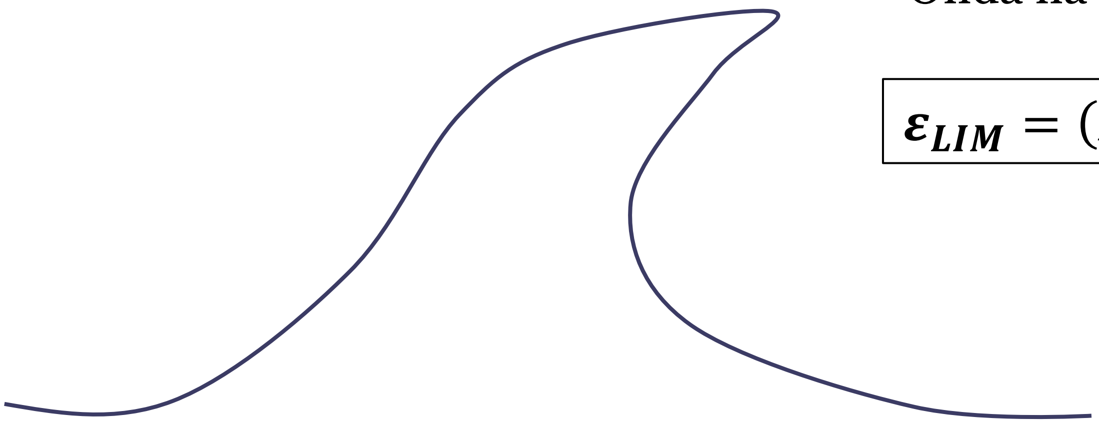
$$\frac{\nabla\phi.\nabla\phi}{\frac{\partial\phi}{\partial t}} \propto \frac{A}{\lambda}$$

$$\frac{\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}}{\frac{\partial\phi}{\partial z}} \propto \frac{A}{\lambda}$$

A *declividade* da onda (**ε = A/λ, kA,..)** é um parâmetro fundamental para a simplificação

O problema em diferentes ordens de magnitude

E o parâmetro kA é sabidamente pequeno, dado que está associado à *estabilidade* da onda progressiva



Onda na iminência de quebrar:

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon_{LIM}} = (\boldsymbol{A}/\boldsymbol{\lambda})_{\boldsymbol{LIM}} \cong 0.07 << 1}$$

Problema de Valor de Contorno

Supondo **kA <<1** :

$$\nabla^2\phi(x,z,t) = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(x,z,t) = 0 \qquad \text{p/ } z = -h$$

$$\zeta(x,t) = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \cancel{\frac{1}{2}\nabla\phi\,\nabla\phi}\right)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial\phi}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}}$$

$\boxed{\text{p/ } z= \zeta(x,t)}$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{p/ } z = 0}$

O PVC Linearizado

Supondo **kA <<1** :

$$\nabla^2 \phi(x,z,t) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x,z,t) = 0 \qquad \text{p/}\ \ z = -h$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\zeta(x,t) = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \\ &\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \qquad \text{p/}\ \ z = 0}$$

As condições na superfície-livre foram aproximadas, e são válidas apenas para kA<<1

PNV USP

A Solução Linear

A solução do PVC é obtida via Método da Separação de Variáveis, e pode ser encontrada, p. ex., em *Dean & Dalrimple, Wave Mech. for Engineers and Scientists, seção 3.4*

$$\varphi(x,z,t) = \frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t)$$

e:

$$\zeta(x,t) = A\cos(kx-\omega t)$$

e:

$$k = \frac{\omega^2}{g\tanh(kh)}$$

O que a solução matemática nos conta sobre a física da onda?

Solução de onda livre LINEAR

A Mecânica das Ondas de Gravidade

- Ondas de gravidade são **ondas dispersivas**: relação não-linear entre comprimento (λ) e período (T)
- O caráter dispersivo *na onda linear* é descrito pela seguinte **relação de dispersão** :

$$k = \frac{\omega^2}{g\tanh(kh)}$$

- Portanto:

$$\lambda = \frac{gT^2 \tanh(\mathrm{kh})}{2\pi}$$

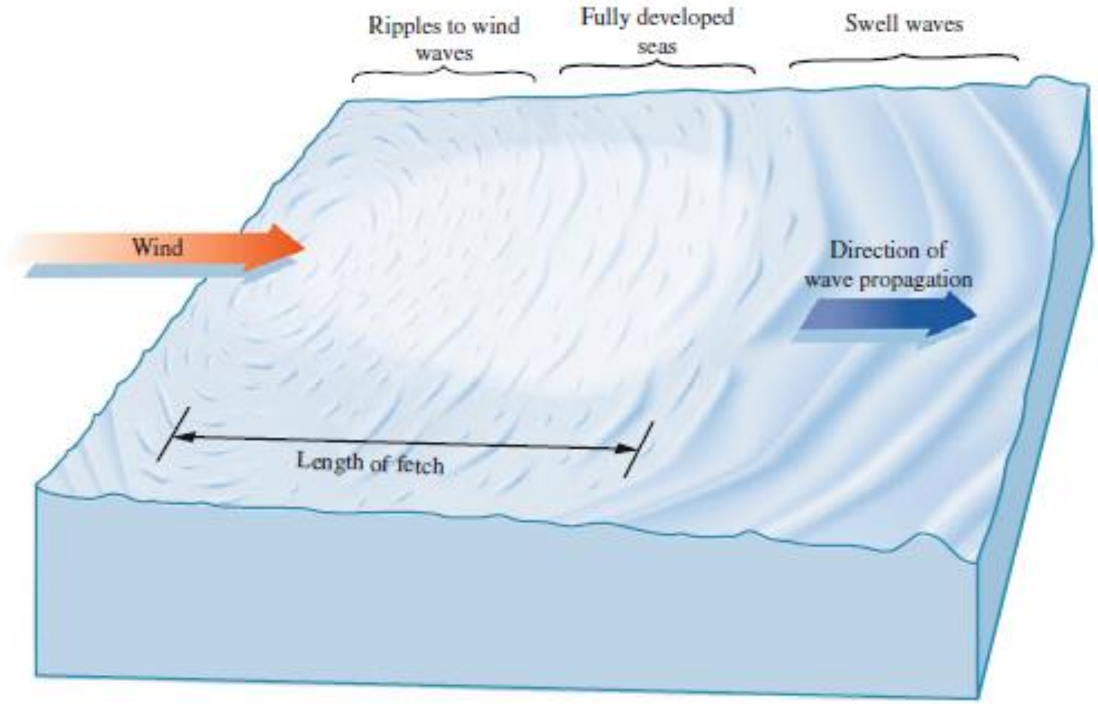
Ondas de ***maior período*** também são ondas ***mais longas***

$$c = \frac{gT \tanh(\mathrm{kh})}{2\pi}$$

Ondas mais longas se propagam com ***maior velocidade***

A Mecânica das Ondas de Gravidade

- Isso explica o *processo de regularização* pelo qual as ondas passam ao se afastar da zona de geração: diferentes componentes de ondas avançam com diferentes celeridades



Source: *Pecher, A. & Kofoed, J.P. (editors), Handbook of Ocean Wave Energy*

PNV USP

A Mecânica das Ondas de Gravidade

- As velocidades do escoamento são dadas por:

$$\vec{v}(x,z,t) = \nabla\phi(x,z,t) = u(x,z,t)\vec{i} + w(x,z,t)\vec{k}$$

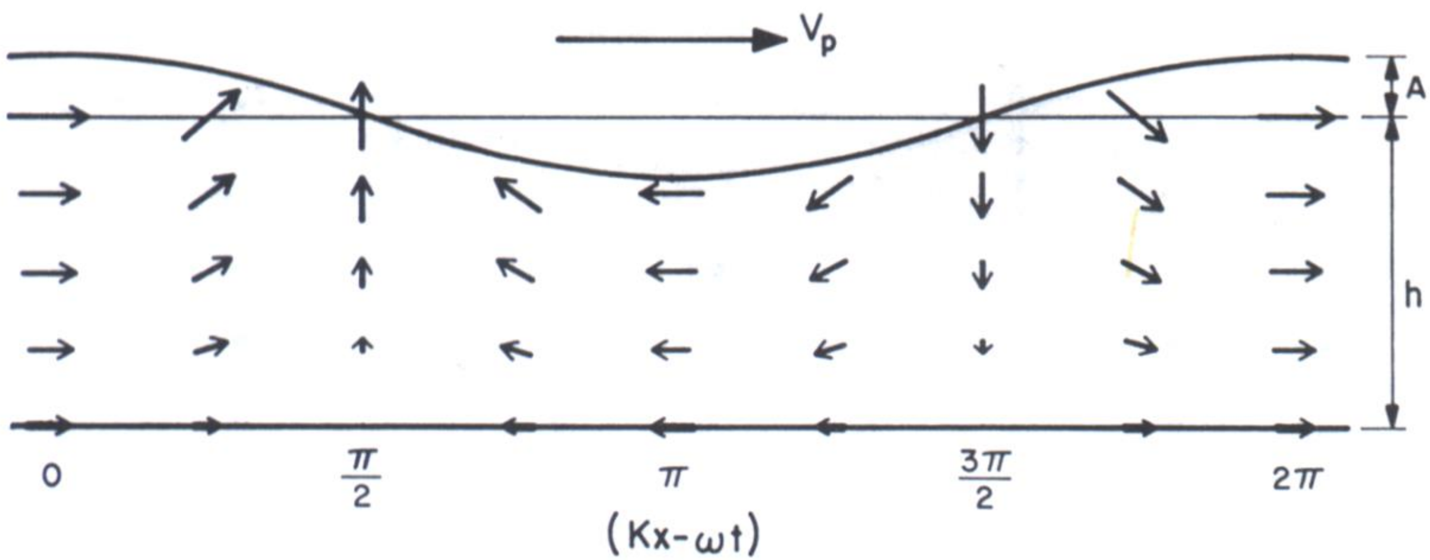
- com:

$$u(x,z,t) = \omega A \frac{cosh\,\mathrm{k(z+h)}}{\sinh(kh)} \cos(kx - \omega t)$$

$$w(x,z,t) = \omega A \frac{sinh\,\mathrm{k(z+h)}}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t)$$

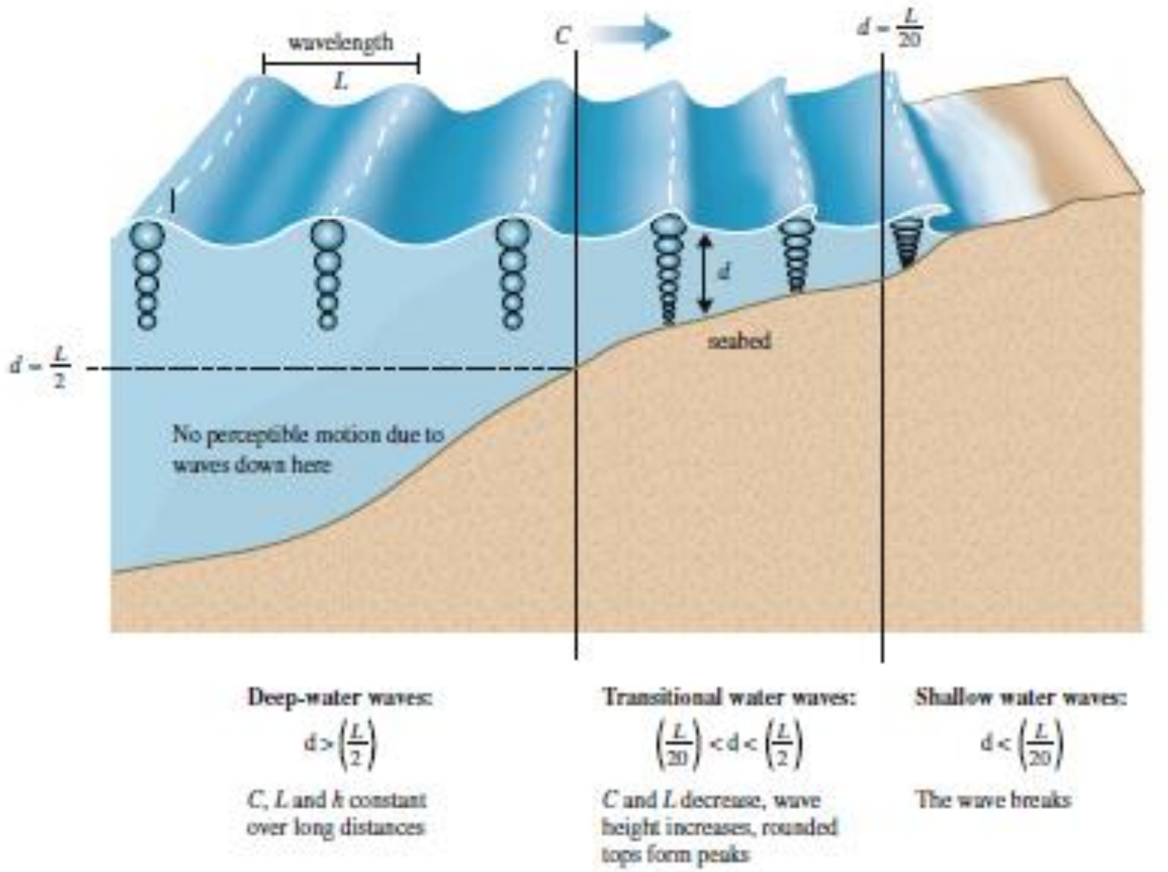
A Mecânica das Ondas de Gravidade

- Padrão do escoamento:



Source: Newman, J.N., Marine Hydrodynamics (1977)

A Mecânica das Ondas de Gravidade



Source: *Pecher, A. & Kofoed, J.P. (editors), Handbook of Ocean Wave Energy*

Campo de pressão

Na teoria linear, devemos desconsiderar os termos quadráticos na amplitude de ondas frente aos termos lineares.

Para a pressão, isso implica:

$$p(x,z,t) = -\rho\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \cancel{\frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi}\right) - \rho g z$$

$$\boldsymbol{\varepsilon = kA \ll 1}$$

Campo de pressão

O campo de pressão linear do escoamento é dado por:

$$p(x,z,t) = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,z,t) - \rho g z$$

Então:

$$p(x,z,t) = \rho g A cos(kx - \omega t) \frac{coshk(z+h)}{coshkh} - \rho g z$$

ou ainda:

$$p(x,z,t) = \rho g \zeta(x,t) \frac{coshk(z+h)}{coshkh} - \rho g z$$

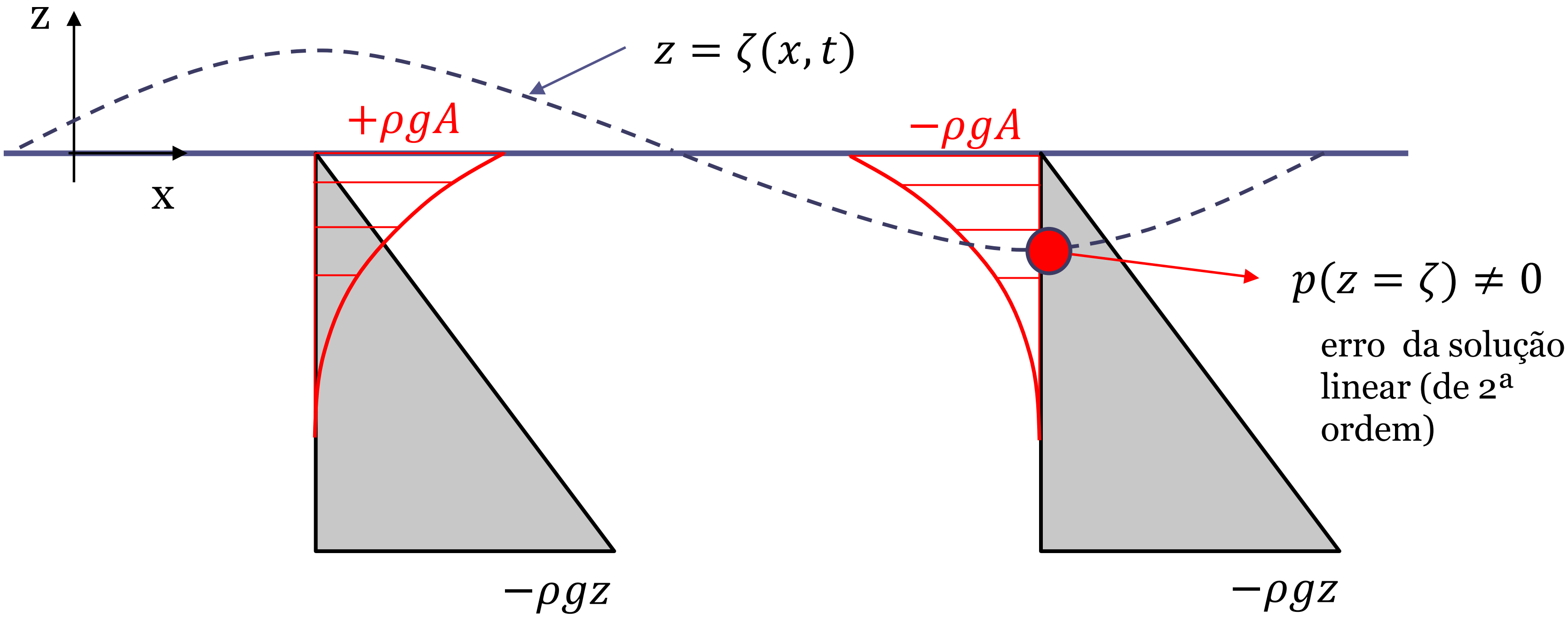
ou em águas profundas:

$$p(x,z,t) = \rho g \zeta(x,t) e^{kz} - \rho g z$$

Campo de pressão

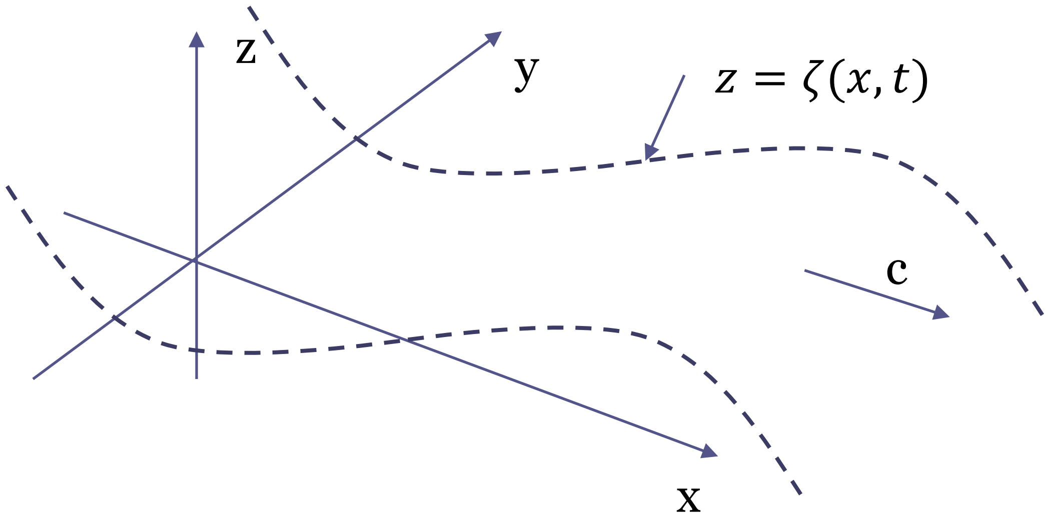
E aqui é importante interpretar corretamente o campo, observando que o mesmo é válido para $z \leq 0$:

$$p(x,z,t) = \rho g \zeta(x,t) e^{kz} - \rho g z$$



Energia média de ondas

A energia de ondas é composta por energia cinética e energia potencial do fluido:

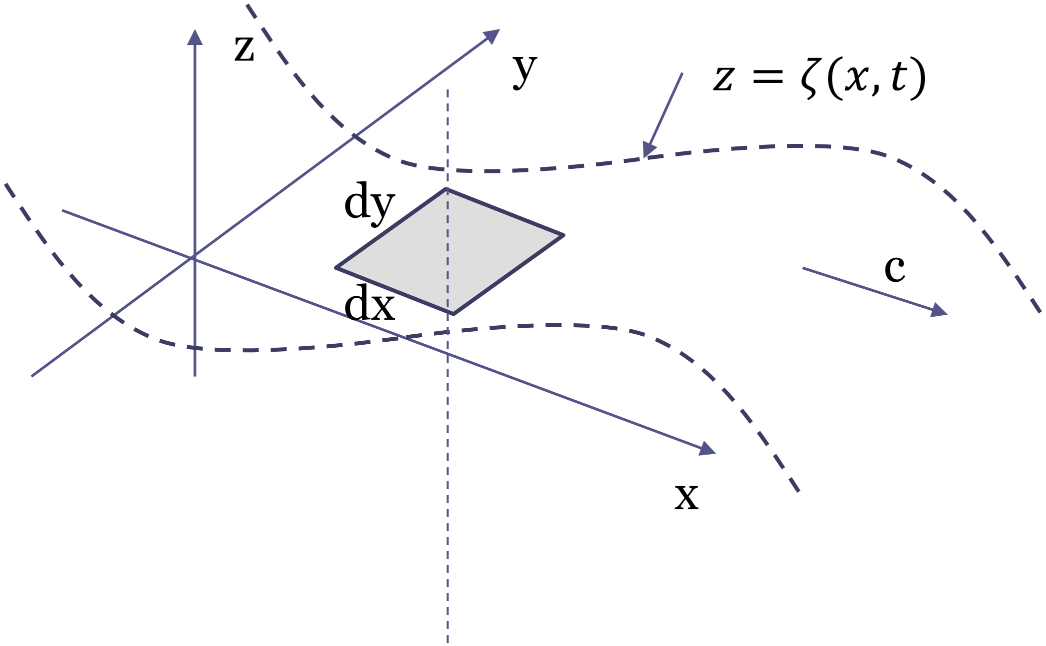


$$E(t) = K(t) + P(t)$$

Como veremos, $E(t)$ é uma quantidade de segunda-ordem, a qual derivaremos a partir da solução linear:

Energia média de ondas

Consideremos uma área elementar da superfície do mar ($dS = dxdy$) na condição de *águas profundas*:



Na coluna de seção elementar, a energia cinética será dada por:

$$K(t) = \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} \left(\frac{1}{2}\rho\nabla\phi \cdot \nabla\phi\right) dz$$

e a energia potencial será:

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} (\rho g z) dz$$

Energia média de ondas

Então:

$$E(t) = \frac{1}{2}\rho \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} \underline{(\nabla\phi \cdot \nabla\phi)}dz + \rho g \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} (z)dz$$

$$\nabla\phi \cdot \nabla\phi = u^2(x,z,t) + w^2(x,z,t) = \omega^2 A^2 e^{2kz}$$

$$E(t) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} e^{2kz}dz + \rho g \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} (z)dz$$

$$E(t) = \frac{1}{4}\rho \frac{\omega^2 A^2}{k} e^{2k\zeta(x,t)} + \frac{1}{2}\rho g \zeta^2(x,t) + energia\ potencial\ que\ não\ depende\ da\ onda$$

$$E(t) = \frac{1}{4}\rho \frac{\omega^2 A^2}{k} e^{2k\zeta(x,t)} + \frac{1}{2}\rho g \zeta^2(x,t)$$

Energia média de ondas

Mas, ainda:

$$e^{2k\zeta(x,t)} \cong 1 + 2k\zeta(x,t) + \ldots$$

Então, retendo apenas termos até segunda-ordem (A^2):

$$E(t) \cong \frac{1}{4}\rho\frac{\omega^2 A^2}{k} + \frac{1}{2}\rho g\zeta^2(x,t)$$

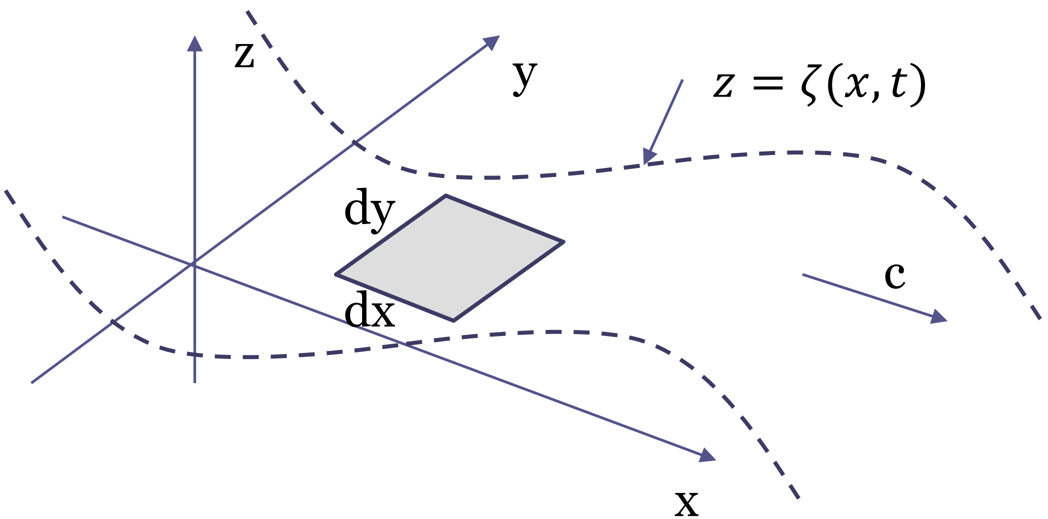
$$E(t) \cong \frac{1}{4}\rho g A^2 + \frac{1}{2}\rho g A^2 cos^2(kx - \omega t)$$

Tomaremos, então, o valor médio desta energia por ciclo de onda:

$$\bar{E} = \frac{1}{4}\rho g A^2 + \frac{1}{2}\rho g A^2 \overline{cos^2(kx - \omega t)}$$

Energia média de ondas

E, finalmente: $\bar{E} = \frac{1}{4}\rho g A^2 + \frac{1}{4}\rho g A^2 = \frac{1}{2}\rho g A^2$



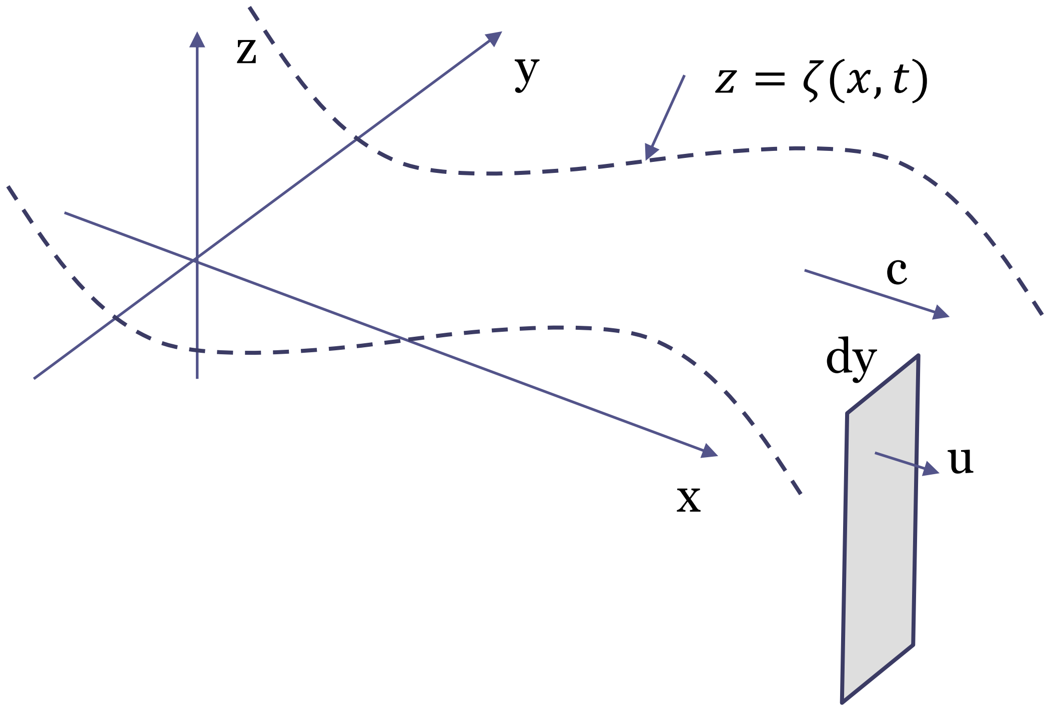
$$\boxed{\bar{E} = \frac{1}{2}\rho g A^2}$$

Energia média de onda por unidade de área de superfície do mar (densidade de energia) (J/m²)

Transporte de Energia

Podemos agora avaliar com que velocidade essa energia média de onda deve ser transmitida.

Consideremos, então, o fluxo de energia (potência) pela seção vertical



$$W(t) = \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} (p dz) u(x,z,t)$$

Potência por unidade de largura (em y) na seção (W/m)

Transporte de Energia

Então:

$$W(t) = \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} p(x,z,t)u(x,z,t)dz$$

e, novamente considerando águas profundas:

$$p(x,z,t) = \rho g A e^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

$$u(x,z,t) = \omega A e^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

$$W(t) = \rho g \omega A^2 cos^2(kx - \omega t) \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} e^{2kz} dz$$

$$W(t) = \frac{1}{2} \rho g \frac{\omega}{k} A^2 cos^2(kx - \omega t)$$

Transporte de Energia

E, novamente tomando o valor médio no tempo:

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\rho g \frac{\omega}{k} A^2 \overline{cos^2(kx - \omega t)} = \frac{1}{4}\rho g A^2 \frac{\omega}{k} = \frac{1}{4}\rho g A^2 \mathrm{c}$$

Observando, então, que o fluxo médio de energia por ciclo de onda deve ser:

$$\overline{W} = \overline{E}.c_G$$

c_G : velocidade de transporte da energia média de onda

Concluímos que:

$$\boxed{c_G = \frac{c}{2}}$$

velocidade *de grupo* da onda linear em águas profundas

Transporte de Energia

Para o caso mais geral de profundidade finita e constante *h*, mostra-se que (verificar):

$$\boxed{\bar{E} = \frac{1}{2}\rho g A^2}$$

$$\boxed{c_G = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{2kh}{senh(2kh)}\right)}$$

varia entre zero ($kh \to \infty$) e um ($kh \to 0$)

Portanto:

$$\boxed{\frac{c}{2} \leq c_G \leq \mathrm{c}}$$

águas profundas

águas rasas ($\mathrm{c} = \sqrt{gh}$)

O conceito de grupo de ondas

Interpretação cinemática: dada por Stokes no séc. XIX, a partir da modelagem do comportamento de uma onda de *swell*

Consideremos, então, duas ondas regulares com mesma amplitude (A) e frequências próximas $(\omega + \delta\omega)$ e $(\omega - \delta\omega)$ que se propagam no mesmo sentido.
A elevação resultante é dada por:

$$\zeta(x,t) = A\cos[(k+\delta k)x - (\omega + \delta\omega)t] + A\cos[(k-\delta k)x - (\omega - \delta\omega)t]$$

ou:

$$\zeta(x,t) = \boxed{2A\cos(\delta kx - \delta\omega t)}\cos(kx - \omega t)$$

Modulação(envoltória)
$\eta(x,t)$

O conceito de grupo de ondas

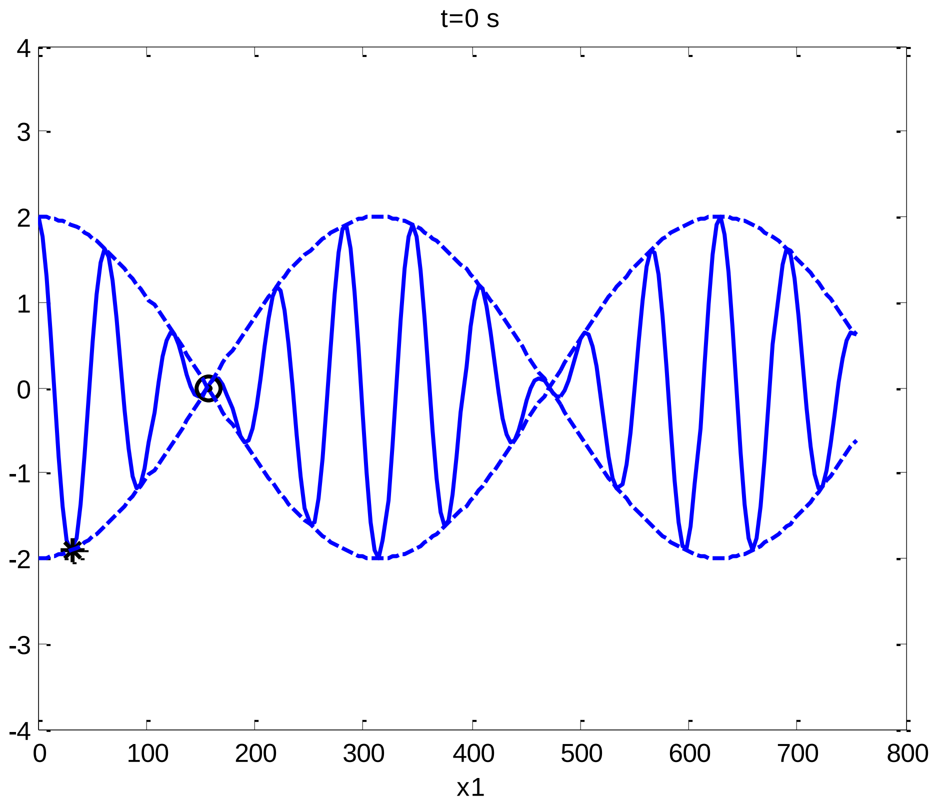
Mas, devemos perceber que a envoltória $\eta(x,t)$ também é, ela própria, uma onda *progressiva*, com:

$$\lambda_\eta = \frac{2\pi}{\delta k} \gg \lambda$$

$$c_\eta = \frac{\delta\omega}{\delta k}$$

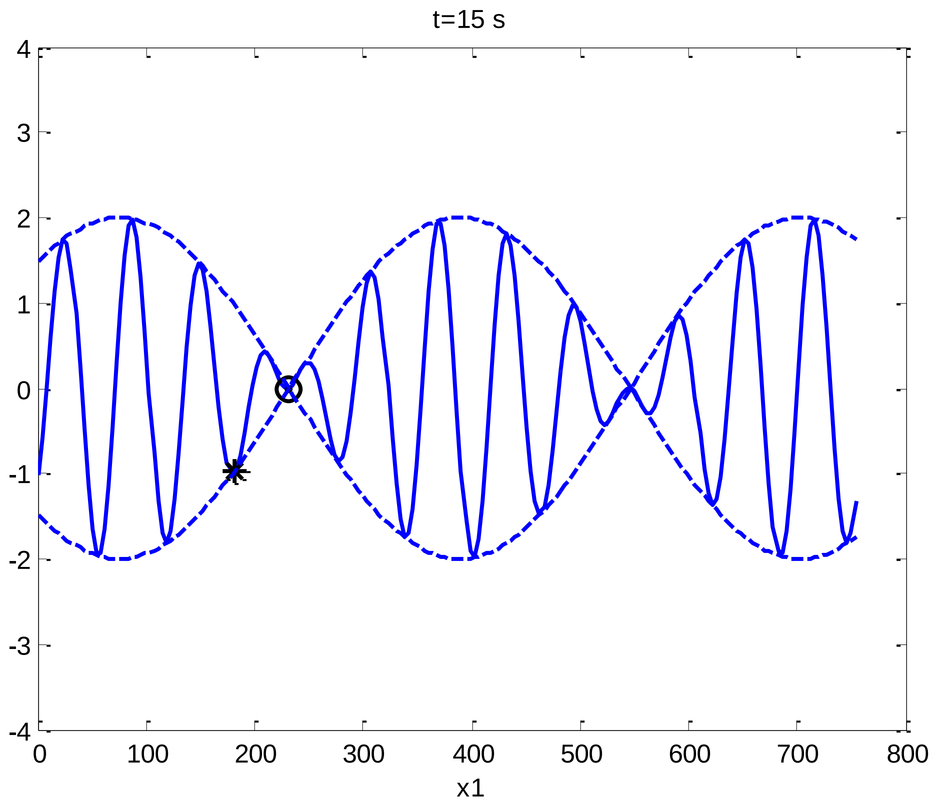
O processo de propagação dessa onda pode então ser ilustrado visualmente:

O conceito de grupo de ondas



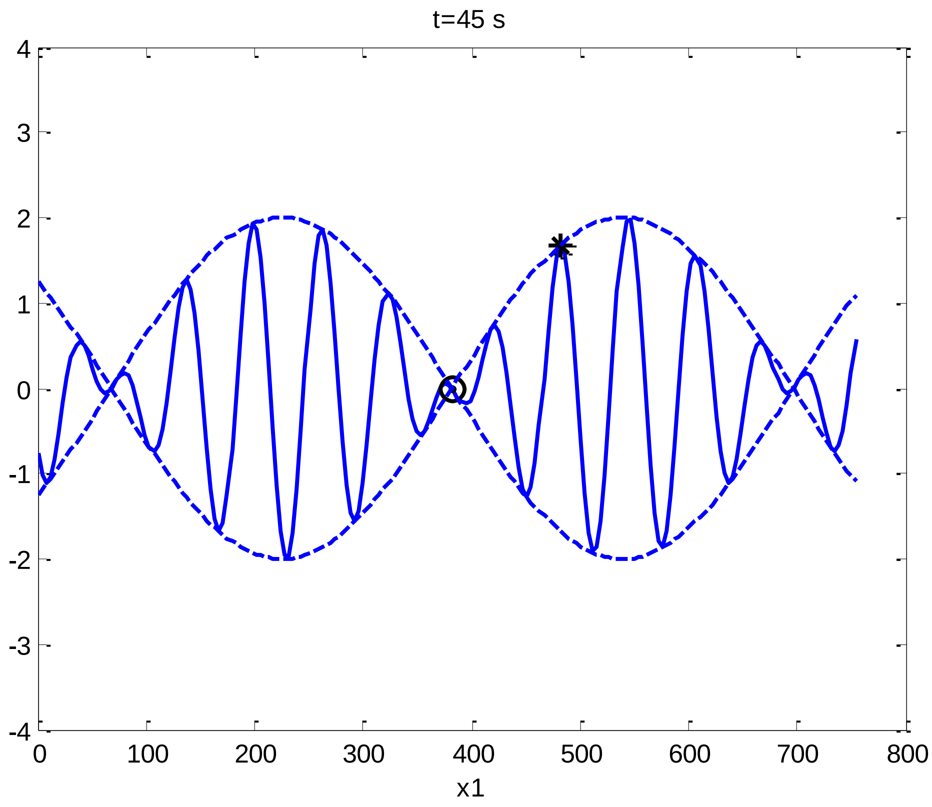
Velocidade da onda c=ω/k (*) e velocidade da envoltória $c_\eta = \delta\omega/\delta k$ (o)

O conceito de grupo de ondas



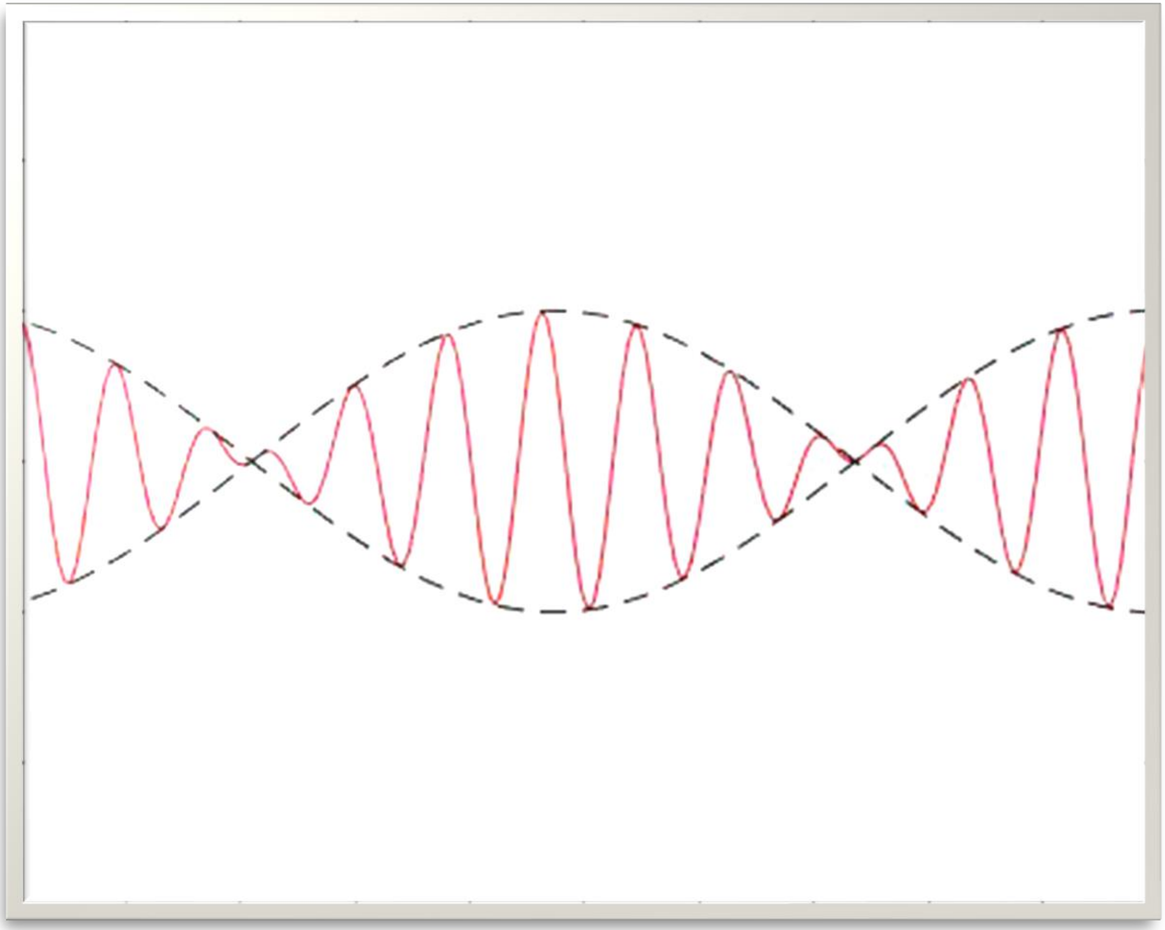
Velocidade da onda c=ω/k (*) e velocidade da envoltória c_η =$\delta\omega/\delta k$ (o)

O conceito de grupo de ondas



Velocidade da onda $c=\omega/k$ (*) e velocidade da envoltória $c_\eta = \delta\omega/\delta k$ (o)

O conceito de grupo de ondas



O conceito de grupo de ondas

No caso em que $\delta\omega \to 0$, recuperamos a situação de uma *onda regular*, e então:

$$\lambda_\eta \to \infty$$

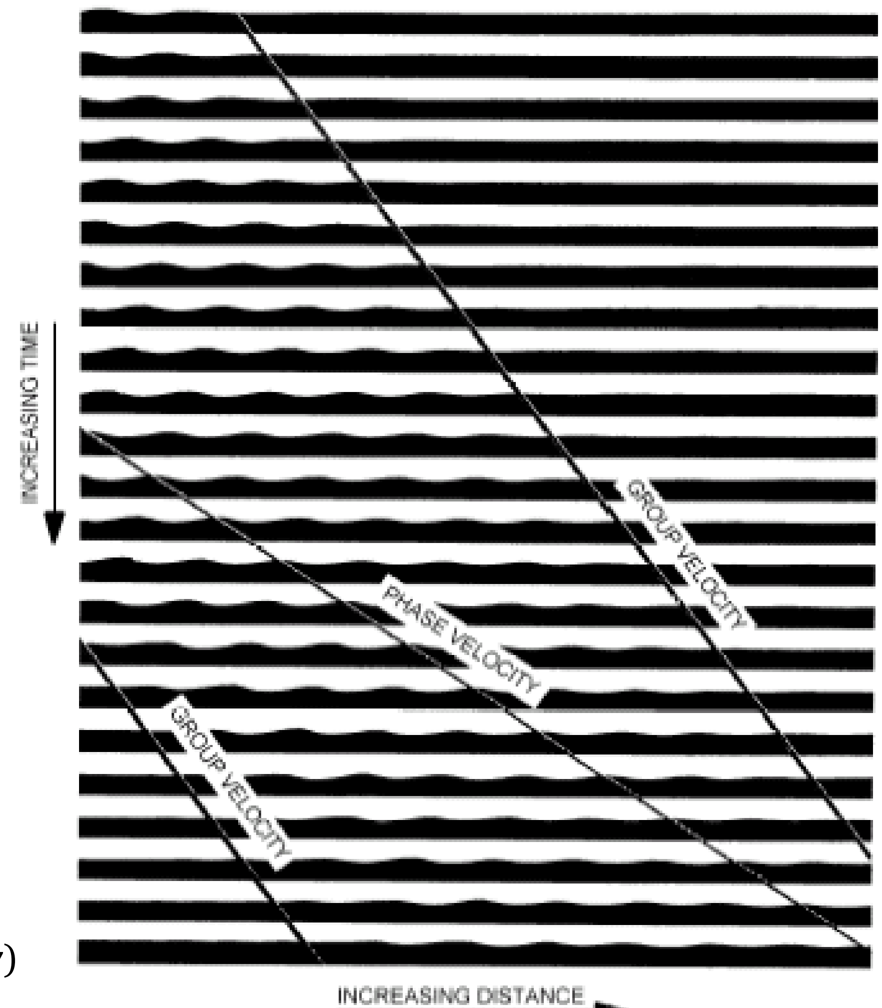
$$\boxed{c_\eta = \frac{d\omega}{dk} = c_G}$$

De fato, no caso de águas profundas, p. ex.:

$$k = \frac{\omega^2}{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\frac{g}{\omega} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{2}}$$

O conceito de grupo de ondas

O processo da evolução do grupo de ondas pode ser facilmente identificado em um canal de ondas, onde a frente e o final do grupo são *observáveis*:



Fonte: Newman (1977)

PNV USP

Potência disponível

- Vimos, então, que a velocidade de transmissão da energia média é :

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}$$

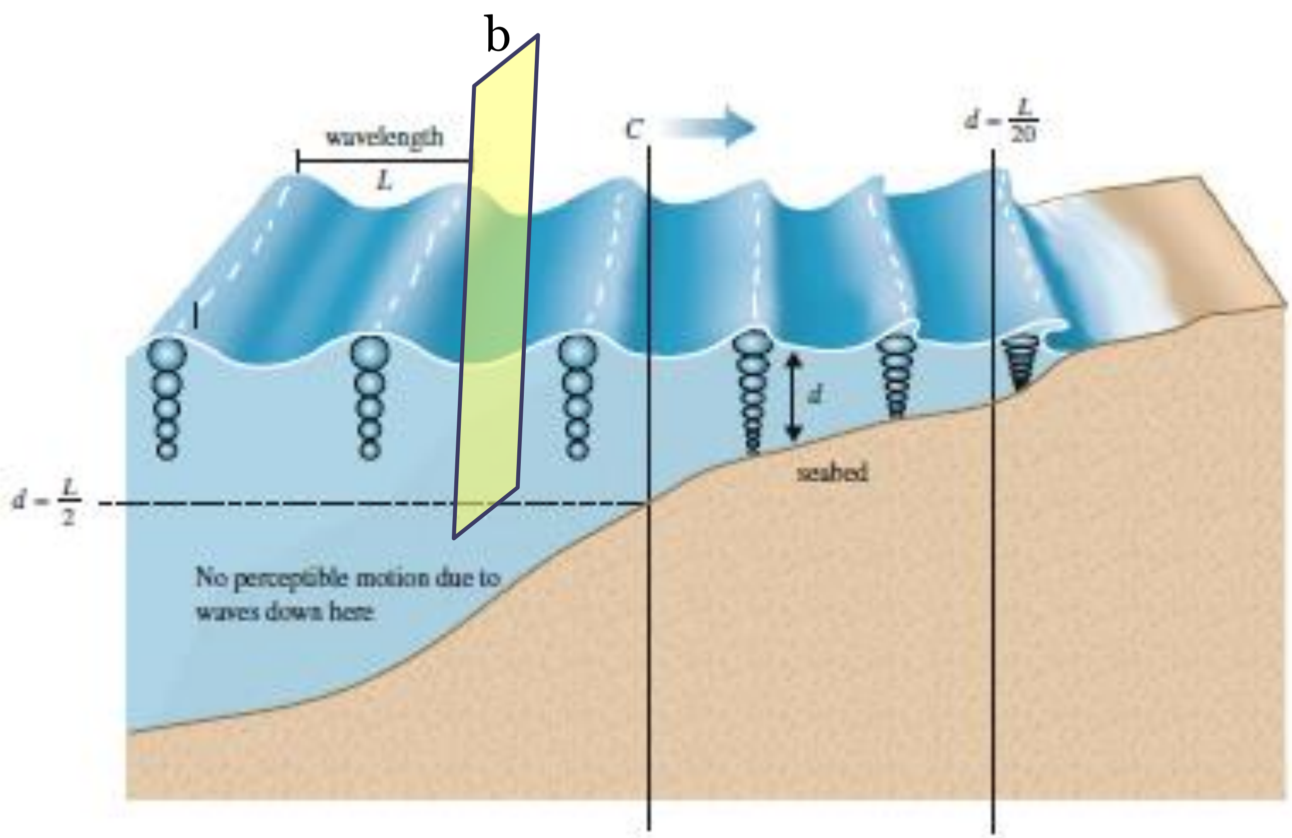
$$c_g = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right)$$

$$c_g = \frac{c}{2}$$ (deep water) → λ/h>1/2

$$c_g = \mathrm{c}$$ (shallow water) → λ/h<1/20

Potência disponível

- e, considerando uma **largura b perpendicular à direção de onda**:



Potência disponível

- a *potência média disponível* na seção é dada por:

$$power = \frac{1}{2}\rho g A^2 c_g b \qquad \text{(W)}$$

Máxima potência que pode ser extraída por um conversor em uma largura de b metros de crista de onda

PNV USP

Potência disponível

- **Exemplo:** onda regular *em águas profundas* com amplitude **A=1m** e período **T=10s**:

$\rho=1025\ kg/m^3$

$g=9{,}81\ m/s^2$

$\bar{E} = 1/2\rho g A^2 = 5{,}0kJ/m^2$

$cg= 1/2c=1/2(gT/2\pi)=7{,}81m/s$

$power/m = \frac{1}{2}\rho g A^2 c_g = \mathbf{39{,}25\ (kW/m)}$