

# Controle Adaptativo - Prova 2 - 2022

Luis Augusto Abe

28 de Novembro de 2022

**Livro:** Adaptive Control Tutorial

**Autores:** Petros Ioannou and Baris Fidan

**Exercício:**

Considere a seguinte planta de segunda ordem

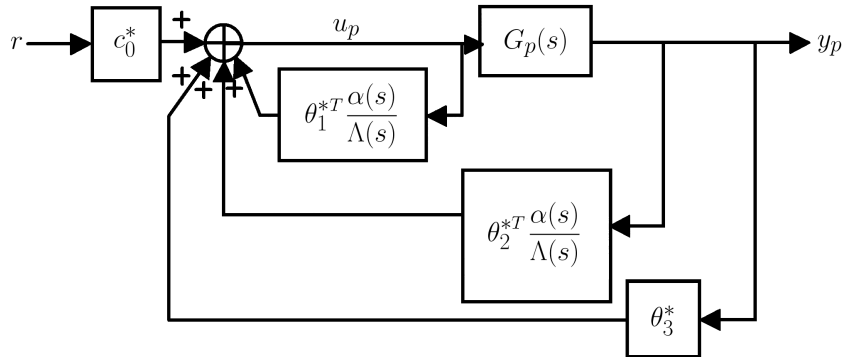


Figura 1: Esquema de controle adaptativo por modelo de referência

$$y_p = -n_1 \frac{s + n_2}{s^2 + n_3 s + n_4} u_p, \quad (1)$$

e um modelo de referência dado por

$$y_m = \frac{4}{s + 5} r. \quad (2)$$

Projete uma lei de Controle por Modelo de Referência, baseada no diagrama da Figura 1, que garanta estabilidade do modelo em malha fechada e satisfaça o objetivo de controle  $y_p \rightarrow y_m$  com  $t \rightarrow \infty$  para qualquer sinal de referência  $r$ . Considere  $n_1$  como sendo o maior algarismo do seu número USP,  $n_2$  o segundo maior algarismo,  $n_3$  o terceiro e  $n_4$  o quarto maior algarismo do seu número USP. Repita o algarismo, se for necessário. Apresente graficamente as respostas no tempo de  $y_p$  do sistema realimentado e  $y_m$ . Mostre todas as contas, detalhadamente, para obter o controlador.

**Resolução:**

Do diagrama da Figura 1, temos que a entrada de controle é

$$u_p = \theta_1^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u_p + \theta_2^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y_p + \theta_3^* y_p + c_0^* r.$$

E como a ordem da planta é  $n_p = 2$  e seu grau relativo  $n^* = 1$  é igual ao modelo de referência, temos que  $\alpha(s) = 1$  e podemos utilizar o seguinte polinômio

$$\Lambda(s) = s + 2.$$

Então, a lei de controle fica

$$\begin{aligned} u_p &= \theta_1^{*T} \frac{1}{s+2} u_p + \theta_2^{*T} \frac{1}{s+2} y_p + \theta_3^* y_p + c_0^* r \\ \left(1 - \theta_1^{*T} \frac{1}{s+2}\right) u_p &= \left(\theta_2^{*T} \frac{1}{s+2} + \theta_3^*\right) y_p + c_0^* r \\ \frac{s+2 - \theta_1^{*T}}{s+2} u_p &= \frac{\theta_2^{*T} + \theta_3^*(s+2)}{s+2} y_p + c_0^* r \\ \frac{s+2 - \theta_1^{*T}}{s+2} u_p &= \frac{\theta_2^{*T} + \theta_3^*(s+2)}{s+2} y_p + c_0^* r \\ u_p &= \frac{\theta_2^{*T} + \theta_3^*(s+2)}{s+2 - \theta_1^{*T}} y_p + \frac{c_0^*(s+2)}{s+2 - \theta_1^{*T}} r \end{aligned}$$

Considerando o NUSP 7594159, temos que  $n_1 = 9$ ,  $n_2 = 9$ ,  $n_3 = 7$  e  $n_4 = 5$ . E assim, a equação da planta fica

$$y_p = -9 \frac{s+9}{s^2+7s+5} u_p,$$

Substituindo  $u_p$  pela lei de controle definida acima, temos

$$\begin{aligned} y_p &= -9 \frac{s+9}{s^2+7s+5} \left[ \frac{\theta_2^{*T} + \theta_3^*(s+2)}{s+2 - \theta_1^{*T}} y_p + \frac{c_0^*(s+2)}{s+2 - \theta_1^{*T}} r \right] \\ \left[ 1 + 9 \frac{s+9}{s^2+7s+5} \cdot \frac{\theta_2^{*T} + \theta_3^*(s+2)}{s+2 - \theta_1^{*T}} \right] y_p &= -9 \frac{s+9}{s^2+7s+5} \cdot \frac{c_0^*(s+2)}{s+2 - \theta_1^{*T}} r \\ \frac{(s^2+7s+5)(s+2 - \theta_1^{*T}) + 9(s+9)(\theta_2^{*T} + \theta_3^*(s+2))}{(s^2+7s+5)(s+2 - \theta_1^{*T})} y_p &= -9 \frac{c_0^*(s+9)(s+2)}{(s^2+7s+5)(s+2 - \theta_1^{*T})} r \\ y_p &= -9 \frac{c_0^*(s+9)(s+2)}{(s^2+7s+5)(s+2 - \theta_1^{*T}) + 9(s+9)(\theta_2^{*T} + \theta_3^*(s+2))} r \end{aligned}$$

Assim, a função de transferência em malha fechada é

$$G_c(s) = \frac{y_p(s)}{r(s)} = \frac{-9c_0^*(s+9)(s+2)}{(s^2+7s+5)(s+2 - \theta_1^{*T}) + 9(s+9)(\theta_2^{*T} + \theta_3^*(s+2))}$$

Forçando para que a saída em malha fechada seja igual ao modelo de referência temos

$$\begin{aligned} \frac{-9c_0^*(s+9)(s+2)}{(s^2+7s+5)(s+2 - \theta_1^{*T}) + 9(s+9)(\theta_2^{*T} + \theta_3^*(s+2))} &= \frac{4}{s+5} \\ -9c_0^*(s+9)(s+2)(s+5) &= 4 \left[ (s^2+7s+5)(s+2 - \theta_1^{*T}) + 9(s+9)(\theta_2^{*T} + \theta_3^*(s+2)) \right] \end{aligned}$$

O Lado Esquerdo da equação é

$$-9c_0^*(s+9)(s+2)(s+5) = -9c_0^*(s^3 + 16s^2 + 73s + 90)$$

O Lado Direito da equação é

$$\begin{aligned}
& 4 \left[ (s^2 + 7s + 5)(s + 2 - \theta_1^{*T}) + 9(s + 9) (\theta_2^{*T} + \theta_3^*(s + 2)) \right] \\
&= 4 \left[ s^3 + (9 - \theta_1^{*T})s^2 + (19 - 7\theta_1^{*T})s + 10 - 5\theta_1^{*T} \right. \\
&\quad \left. + 9(\theta_3^*s^2 + 11\theta_3^*s + \theta_2^{*T}s + 9\theta_2^{*T} + 18\theta_3^*) \right] \\
&= 4s^3 + 4(9 - \theta_1^{*T} + 9\theta_3^*)s^2 + 4(19 - 7\theta_1^{*T} + 9\theta_2^{*T} + 99\theta_3^*)s \\
&\quad + 4(10 - 5\theta_1^{*T} + 81\theta_2^{*T} + 162\theta_3^*)
\end{aligned}$$

Igualando as potências em  $s$ , temos que  $c_0^* = -4/9$ . E assim,

$$\begin{cases}
4(9 - \theta_1^{*T} + 9\theta_3^*) = 4 \cdot 16 \\
4(19 - 7\theta_1^{*T} + 9\theta_2^{*T} + 99\theta_3^*) = 4 \cdot 73 \\
4(10 - 5\theta_1^{*T} + 81\theta_2^{*T} + 162\theta_3^*) = 4 \cdot 90
\end{cases}$$

simplificando,

$$\begin{cases}
-\theta_1^{*T} + 9\theta_3^* = 7 \\
-7\theta_1^{*T} + 9\theta_2^{*T} + 99\theta_3^* = 54 \\
-5\theta_1^{*T} + 81\theta_2^{*T} + 162\theta_3^* = 80
\end{cases}
= \begin{cases}
\theta_1^{*T} - 9\theta_3^* = -7 \\
7\theta_1^{*T} - 9\theta_2^{*T} - 99\theta_3^* = -54 \\
5\theta_1^{*T} - 81\theta_2^{*T} - 162\theta_3^* = -80
\end{cases}$$

Escrevendo o sistema acima na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 7 & -9 & -99 \\ 5 & -81 & -162 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^{*T} \\ \theta_2^{*T} \\ \theta_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -54 \\ -80 \end{bmatrix}$$

que nos dá

$$\begin{bmatrix} \theta_1^{*T} \\ \theta_2^{*T} \\ \theta_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5/9 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a entrada de controle é dada por

$$u_p = -7 \frac{1}{s+2} u_p + \left(\frac{5}{9}\right) \frac{1}{s+2} y_p - \left(\frac{4}{9}\right) r$$

e pode ser implementando da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_1 &= -2\omega_1 + u_p, \\
\dot{\omega}_2 &= -2\omega_2 + y_p, \\
u_p &= -7\omega_1 + \left(\frac{5}{9}\right)\omega_2 - \left(\frac{4}{9}\right)r
\end{aligned}$$

A equação da planta de segunda ordem é

$$y_p = -9 \frac{s+9}{s^2+7s+5} u_p.$$

Para simular, através do método de Euler, precisamos reduzir a equação para um sistema de primeira ordem. Utilizando a seguinte mudança de variável  $y_1 = y_p$  e  $y_2 = \dot{y}_p$ , temos que

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -7y_2 - 5y_1 - 9\dot{u}_p - 81u_p \end{cases}$$

O seguinte código em MATLAB foi utilizado para realizar a simulação, onde podemos definir diversas condições iniciais e o sinal de referência  $r$ .

```
% 2nd Order Plant Model: y_p = -n1.(s + n2)/(s^2 + n3.s + n4).u_p
n1 = 9;
n2 = 9;
n3 = 7;
n4 = 5;
% Reference Model: \dot{y}_m = -am.y_m + bm.r
am = 5;
bm = 4;
% Simulation Time
dt = 1e-4;
Tmax = 10;
t = 0:dt:Tmax;
% Initial Conditions
ym(1) = 0;
omega1(1) = 0;
omega2(1) = 0;
up(1) = 2;
y1(1) = 2;
y2(1) = 1;

for ii = 1:3
    % Reference Input
    rtitle = ["r = 5", "r = sin(2t)", "r = 1/(1+t) "];
    r = [5*ones(1,length(t)); sin(2*t); 1./(1+t)];
    r = r(ii,:);
    for i = 1:length(t)-1
        % Reference Model
        ym(i+1) = ym(i) + dt*(-am*ym(i) + bm*r(i));
        % Input Control
        omega1(i+1) = omega1(i) + dt*(-2*omega1(i) + up(i));
        omega2(i+1) = omega2(i) + dt*(-2*omega2(i) + y1(i));
        up(i+1) = -7*omega1(i+1) + (5/9)*omega2(i+1) - (4/9)*r(i+1);
        % Closed-loop Plant
        y1(i+1) = y1(i) + dt*y2(i);
        y2(i+1) = y2(i) + dt*(-n3*y2(i) - n4*y1(i) - ...
            n1*(up(i+1)-up(i))/dt - n1*n2*up(i));
    end

    fig = figure;
    set(fig, 'Position', [1 1 850 400]);
    hold on
    plot(t, ym);
    plot(t, y1);
    set(gca, 'Box', 'on'); set(gca, 'XGrid', 'on'); set(gca, 'YGrid', 'on');
    xlabel('t [s]');
```

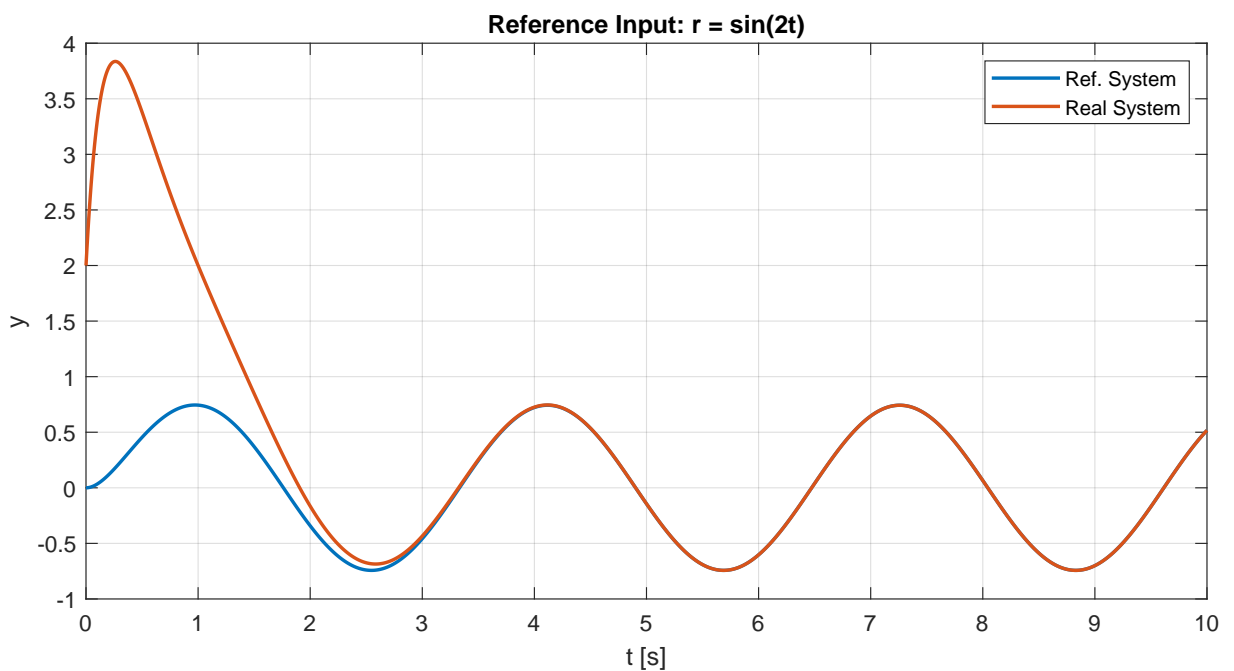
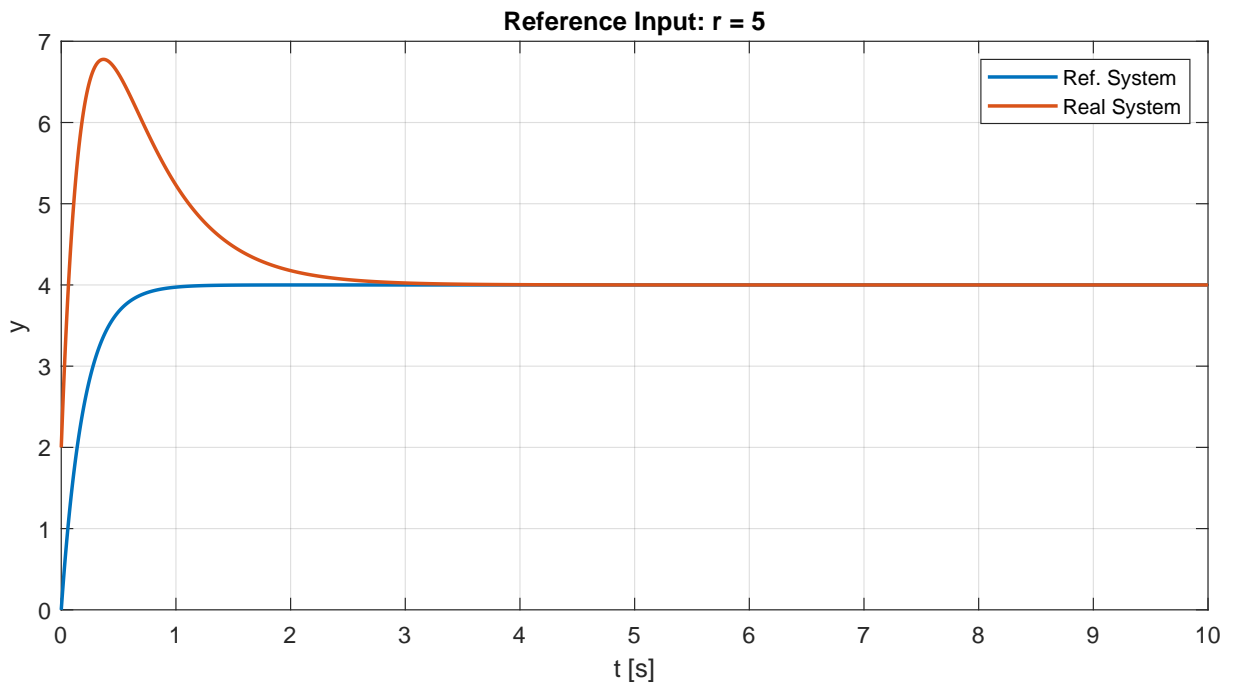
```

ylabel('y');
legend('Ref. System', 'Real System');
title("Reference Input: " + rtitle(ii));

```

end

Os resultados das simulações são mostrados nas figuras abaixo. Nelas podemos ver que o sinal  $y_p$  de saída da planta em malha fechada sempre convergindo para o modelo de referência  $y_m$ , não importando as condições iniciais aplicadas nas variáveis ou o sinal de referência utilizado.



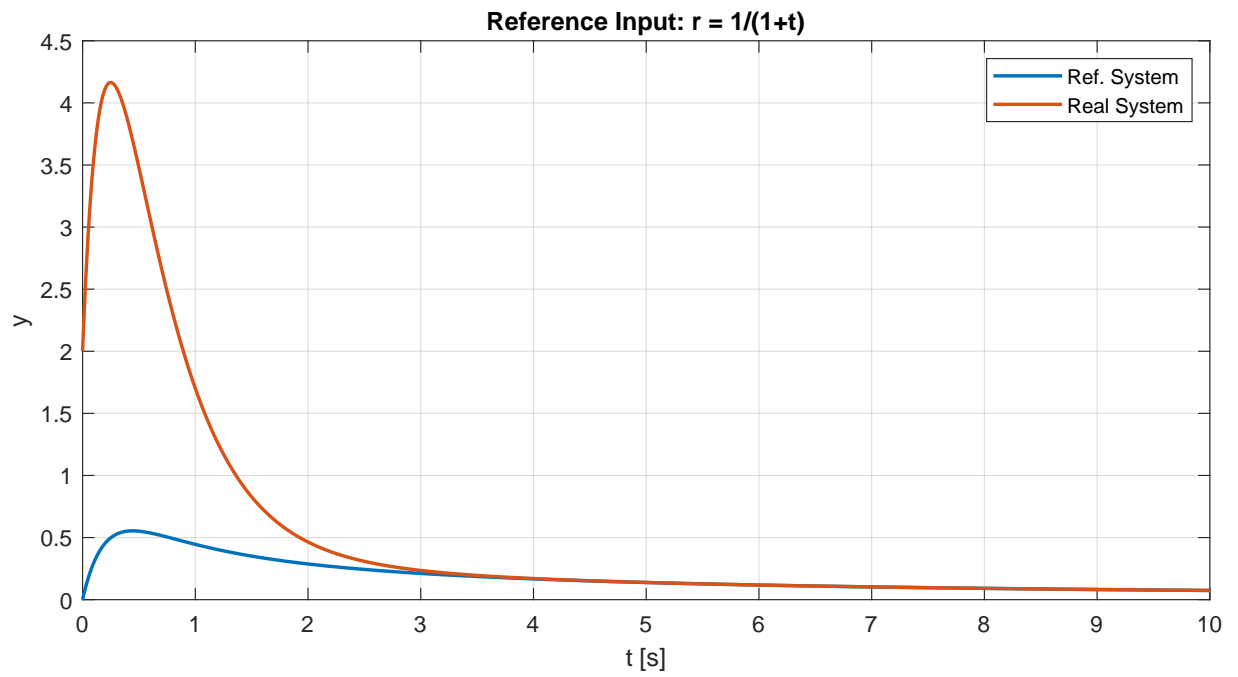


Figura 2: Gráficos das simulações realizadas para diversos tipos de entrada.