MAT6682 - Tópicos de Análise Funcional - 2023
Lista 8

1. Operadores Compactos e Propriedade da Aproximação

1. Sejam X e Y espaços normados e $T \in \mathscr{L}(X,Y)$.

a) Mostre que se $T \in \mathscr{F}(X,Y) \setminus \{0\}$, então existem subconjuntos linearmente independentes $\{x_1^*,\dots,x_m^*\}$ de X^* e $\{y_1,\dots,y_m\}$ de Y tais que $T = \sum_{i=1}^{m} x_i^*(\cdot)y_i$. Mostre também que, neste caso, $T^* = \sum_{i=1}^{m} J_Y(y_i)(\cdot)x_i^*$.

b) Conclua que se $T \in \overline{\mathscr{F}(X,Y)}$, então $T^* \in \overline{\mathscr{F}(Y^*,X^*)}$.[1]

2. Sejam X e Y espaços normados e $T \in \mathscr{K}(X,Y)$.

a) Mostre que $T(X)$ é separável.

b) Mostre que se X e Y são de Banach, então $T(X)$ é fechada se, e somente se, $T \in \mathscr{F}(X,Y)$.

3. Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear.

a) Use o Teorema de Schauder para provar que T é compacto se, e somente se, a restrição de T^* a B_{Y^*} é w^*-$\|\cdot\|$-contínua.

b) Mostre que se Y é de Banach e T é compacto, então $T^{**}(X^{**}) \subset J_Y(Y)$. (*Sugestão:* use o item anterior e os Teoremas de Schauder e de Goldstine.)

4. Sejam X e Y espaços normados e $T : Y^* \to X^*$ um operador linear. Mostre que T é w^*-$\|\cdot\|$-contínuo se, e somente se, existe $S \in \mathscr{F}(X,Y)$ tal que $T = S^*$.

5. Seja $\mathscr{C}^1[a,b]$ o espaço de Banach de todas as funções de classe $\mathscr{C}^1$ em $[a,b]$ munido da norma $\|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

a) Mostre que a inclusão $I : \mathscr{C}^1[a,b] \to \mathscr{C}[a,b]$ é um operador linear compacto.

b) Conclua que se X é um subespaço fechado de $\mathscr{C}[a,b]$ contido em $\mathscr{C}^1[a,b]$, então X tem dimensão finita.

6. Sejam X um espaço de Banach, $(x_n)_{n\geq 1}$ uma base de Schauder de X e $(P_n)_{n\geq 1}$ a sequência de projeções canônicas de $(x_n)_{n\geq 1}$. Mostre que $(x_n)_{n\geq 1}$ é contrátil se, e somente se, dados Y um espaço de Banach e $T \in \mathscr{K}(X,Y)$, a sequência $(T \circ P_n)_{n\geq 1}$ converge para T.

7. Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear. Dizemos que T é *completamente contínuo* (ou T é um *operador de Dunford-Pettis*) se $T(K)$ é um subconjunto compacto de Y para todo subconjunto w-compacto K de X. Prove as seguintes afirmações:

a) Se T é compacto, então T é completamente contínuo.

b) Se T é completamente contínuo, então T é contínuo.

c) T é completamente contínuo se, e somente se, T é w-$\|\cdot\|$-sequencialmente contínuo, isto é, se para toda sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ em X tal que $x_n \xrightarrow{w} x$, tem-se $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} T(x)$.

d) Se X é reflexivo, então T é compacto se, e somente se, T é completamente contínuo.

e) Se Y é de Banach, então a coleção dos operadores completamente contínuos de X em Y é um subespaço fechado de $\mathscr{L}(X,Y)$.

[1] A recíproca é verdadeira e é consequência de um importante resultado chamado Princípio da Reflexividade Local. Veja R. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer-Verlag (2002), Teorema 5.54 e Proposição 5.55, pg. 124.

8. Dados X e Y espaços normados, prove as seguintes afirmações:

a) Se X é de Schur, então todo $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ é completamente contínuo.

b) Se X é reflexivo e Y é de Schur, então todo $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ é compacto.

c) Se X é reflexivo, então todo $T \in \mathscr{L}(c_0, X)$ é compacto.

9. Dê um exemplo de dois espaços de Banach X e Y e um operador linear $T : X \to Y$ tais que:

a) X não é reflexivo, Y é reflexivo e T é completamente contínuo, mas não é compacto.

b) T é contínuo, mas não é completamente contínuo.

c) T é completamente contínuo, mas não é w-$\|\cdot\|$-contínuo.

d) T é compacto, mas T^* não é w^*-$\|\cdot\|$-contínuo. (*Sugestão:* use o Exercício 4.)

10. Um espaço de Banach X tem a *Propriedade da Aproximação Limitada* (BAP) se existe $\lambda > 0$ tal que, para todo subconjunto compacto não vazio K de X e todo $\varepsilon > 0$, existe $S \in \mathscr{F}(X, X)$ tal que $\|S\| \leq \lambda$ e $\|S - \mathrm{Id}\|_K < \varepsilon$; neste caso, dizemos que X tem a λ-*Propriedade da Aproximação Limitada* (λ-BAP). Se X tem 1-BAP, dizemos que X tem a *Propriedade da Aproximação Métrica.*

a) Suponha que X seja separável. Mostre que X tem BAP se, e somente se, existe uma sequência $(T_n)_{n \geq 1}$ em $\mathscr{F}(X, X)$ tal que $T_n(x) \longrightarrow x$ para todo $x \in X$.

b) Conclua que todo espaço de Banach com base de Schauder tem BAP.[2]

c) Mostre que se K é um espaço de Hausdorff compacto, então $C(K)$ tem 1-BAP.

11. Mostre que um espaço de Banach X tem AP (respectivamente, BAP) se, e somente se, todo subespaço complementado de X tem AP (respectivamente, BAP).

[2] O primeiro exemplo de um espaço de Banach separável que tem AP, mas não tem BAP, é devido a T. Figiel e W. B. Johnson (1973), e o primeiro exemplo de um espaço de Banach separável que tem BAP, mas não tem base de Schauder, é devido a S. Szarek (1987).