MAT2352 - Cálculo para funções de várias variáveis II
4a. Lista de Exercícios - 2o. semestre de 2023

1. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo da curva indicada:

(a) $\displaystyle\int_\gamma x\, ds$, $\gamma(t) = (t^3, t)$, $0 \leq t \leq 1$. Resp. $(10\sqrt{10} - 1)/54$.

(b) $\displaystyle\int_\gamma xy^4\, ds$, γ é a semi-circunferência $x^2 + y^2 = 16$, $x \geq 0$. Resp. $1638, 4$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma (x - 2y^2)\, ds$, γ é o arco da parábola $y = x^2$ de $(-2, 4)$ a $(1, 1)$. Resp. 48.

(d) $\displaystyle\int_\gamma (x^2 + xy)\, ds$, γ consiste dos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ e de $(2, 0)$ a $(3, 2)$. Resp. $\frac{17}{3}$.

(e) $\displaystyle\int_\gamma xyz\, ds$, $\gamma : x = 2t$, $y = 3 \operatorname{sen} t$, $z = 3 \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Resp. $9\sqrt{13}\pi/4$.

(f) $\displaystyle\int_\gamma xy^2 z\, ds$, γ é o segmento de reta de $(1, 0, 1)$ a $(0, 3, 6)$. Resp. $3\sqrt{35}$.

2. Calcule o comprimento das curvas

(a) $\gamma(t) = (a(t - \operatorname{sen} t), a(1 - \cos t))$, onde $0 \leq t \leq 2\pi$ e $a > 0$. Resp. $8a$.

(b) $\gamma(t) = (t \cos t, t \operatorname{sen} t, t)$, onde $0 \leq t \leq \sqrt{2}$. Resp. $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$.

(c) $\gamma(t) = (t, \dfrac{3t^2}{2}, \dfrac{3t^2}{2})$, onde $0 \leq t \leq 2$. Resp. $\sqrt{73} + \frac{\ln(\sqrt{73}+6\sqrt{2})}{6\sqrt{2}}$

3. (a) Determine a massa de um arame cujo formato é o da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, t^2)$, onde $0 \leq t \leq 1$, e a densidade de massa em cada ponto é $\delta(x, y, z) = x$. Resp. $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$.

(b) Um cabo delgado é dobrado na forma de um semi-círculo $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$. Se a densidade é $\delta(x, y) = x^2$, determine a massa e o centro de massa do cabo. Resp. 4π, $(\frac{16}{3\pi}, 0)$.

4. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\vec{i} - 7yz\vec{j} + 2xz^2\vec{k}$ e γ é a curva ligando o ponto $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ nos seguintes casos:

(a) $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$. Resp. $-\frac{11}{15}$.

(b) γ é composta dos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$, depois a $(1, 1, 0)$ e depois a $(1, 1, 1)$.Resp. 1.

5. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para

(a) $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$, onde γ é o arco de circunferência $\gamma(x) = (x, \sqrt{4 - x^2})$, ligando $(-2, 0)$ a $(2, 0)$.

Resp. 2π.

(b) $\vec{F}(x, y) = 2(x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$, onde γ é a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, percorrida uma vez em sentido anti-horário. Resp. $-\pi ab$.

(c) $\int_\gamma x^3y^2z\,dz$, γ é dada por $x = 2t$, $y = t^2$, $z = t^2$, $0 \le t \le 1$. Resp. $\frac{16}{11}$.

(d) $\int_\gamma z^2\,dx - z\,dy + 2y\,dz$, γ consiste dos segmentos de reta de $(0,0,0)$ a $(0,1,1)$, de $(0,1,1)$ a $(1,2,3)$ e de $(1,2,3)$ a $(1,2,4)$. Resp. $\frac{77}{6}$.

6. Calcule

(a) $\int_\gamma x\,dx + (y+x)\,dy + z\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 2x + 2y - 1$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido horário. Resp. $-\pi$.

(b) $\int_\gamma (2y+1)\,dx + z\,dy + x\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x^2 + 4y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$, com $y \ge 0$, $z \ge 0$, percorrida uma vez do ponto $(1,0,0)$ ao ponto $(-1,0,0)$. Resp. -2.

(c) $\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x+y)$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxz seja percorrida uma vez no sentido horário. Resp. $-2\pi\sqrt{2}$.

(d) $\int_\gamma x\,dx + (y+x)\,dy + z\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = xy$ e $x^2 + y^2 = 1$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido horário. Resp. 0.

(e) $\int_\gamma x^2\,dx + x\,dy + z\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = \frac{x^2}{9}$ e $z = 1 - \frac{y^2}{4}$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido anti horário. Resp. 6π

(f) $\int_\gamma y^2\,dx + 3z\,dy$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 2x + 4y$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido anti horário. Resp. 10π.

7. Calcule

(a) $\int_\gamma 2x\,dx + (z^2 - \dfrac{y^2}{2})\,dz$, onde γ é o arco circular dado por $x = 0$, $y^2 + z^2 = 4$, de $(0,2,0)$ a $(0,0,2)$, no sentido anti-horário. Resp. 0.

(b) $\int_\gamma \dfrac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, onde γ é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, percorrida uma vez no sentido horário.
Resp. $2\pi\,a^2$.

(c) $\int_\gamma \sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy$, sendo γ a fronteira da região limitada por $x = 0$, $y = 1$ e $y = x^2$, percorrida uma vez no sentido horário. Resp. $-\frac{3}{10}$.

8. (a) Mostre que um campo de força constante $\vec{F} = k_1\vec{i} + k_2\vec{j}$ realiza trabalho nulo sobre uma partícula que dá uma única volta completa na circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

(b) Isso também é verdadeiro para um campo de força $\vec{F}(x,y) = k(x,y)$, onde k é uma constante?

9. Mostre que se $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 e $\vec{F}(x,y,z) = (f_1(x), f_2(y), f_3(z))$, então $\vec{F}$ é conservativo.

10. Em cada item, prove que o campo vetorial é conservativo encontrando a função potencial e calcule as integrais.

(a) $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(2,2)} y\,dx + x\,dy.$ Resp. 3.

(b) $\displaystyle\int_{(-1,0)}^{(1,0)} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy.$ Resp. 0.

(c) $\displaystyle\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz.$ Resp. -2.

11. Em cada item abaixo, determine se $\vec{F}$ é ou não um campo gradiente, ou seja conservativo, no domínio indicado D. Em caso afirmativo, determine um potencial de $\vec{F}$.

(a) $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + x\vec{j}$, $D = \mathbb{R}^2$;

(b) $\vec{F}(x,y) = (2xe^y + y)\vec{i} + (x^2e^y + x - 2y)\vec{j}$, $D = \mathbb{R}^2$;

(c) $\vec{F}(x,y,z) = (2x^2 + 8xy^2)\vec{i} + (3x^3y - 3xy)\vec{j} - (4z^2y^2 + 2x^3z)\vec{k}$, $D = \mathbb{R}^3$;

(d) $\vec{F}(x,y,z) = (x+z)\vec{i} - (y+z)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$, $D = \mathbb{R}^3$;

(e) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2\cos x + z^3)\vec{i} + (2y\operatorname{sen} x - 4)\vec{j} + (3xz^2 + 2)\vec{k}$, $D = \mathbb{R}^3$;

(f) $\vec{F}(x,y) = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2+y^2}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$;

(g) $\vec{F}(x,y) = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2+y^2}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \le 0\}$;

(h) $\vec{F}(x,y) = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2+y^2}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$;

12. Mostre que cada campo abaixo é conservativo e calcule as integrais.

(a) $\displaystyle\int_\gamma 7x^6y\,dx + x^7\,dy$ sendo $\gamma(t) = (t, e^{t^2-1})$, onde $t \in [0,1]$. Resp. 1.

(b) $\displaystyle\int_\gamma [\ln(x+y^2) - y]\,dx + [2y\ln(x+y^2) - x]\,dy$ sendo γ a curva $(x-2)^2 + y^2 = 1$ com $y \ge 0$ orientada no sentido horário. Resp. $3\ln 3 - 2$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$ sendo γ a curva dada por $x(t) = \cos^3 t$ e $y(t) = \operatorname{sen}^3 t$ com $y \ge 0$ ligando os pontos $(1,0)$ e $(0,1)$, nessa ordem. Resp. $-\frac{\pi}{2}$.

(d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{(x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2+y^2)}.d\vec{r}$ sendo γ a curva dada por $\gamma(t) = (e^t,\ \operatorname{sen} t)$ para $0 \le t \le \pi$. Resp. π.

13. Mostre que as integrais de linha não dependem do caminho e calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy.$ Resp. $a^2b - \frac{b^3}{3} - \frac{2}{3}$.

(b) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(a,b)} \operatorname{sen} y\,dx + x\cos y\,dy$. Resp. $a\operatorname{sen} b$.

(c) $\displaystyle\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz.$ Resp. -2.

(d) $\int_\gamma 2x \operatorname{sen} y\, dx + (x^2 \cos y - 3y^2)\, dy$, onde γ é uma curva ligando $(-1,0)$ a $(5,1)$. Resp. $25 \operatorname{sen} 1 - 1$.

(e) $\int_\gamma \operatorname{sen}(yz)\, dx + xz \cos(yz)\, dy + xy \cos(yz)\, dz$, sendo γ a hélice $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$, $z(t) = t$ para $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Resp. $\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right)$.

14. Usando o Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

(a) $\oint_\gamma x^2 y\, dx + xy^3\, dy$, onde γ é o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$, orientado no sentido anti-horário. Resp. $-1/12$.

(b) $\oint_\gamma (x + 2y)\, dx + (x - 2y)\, dy$, onde γ consiste do arco da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ e do segmento de reta de $(1,1)$ a $(0,0)$, orientada no sentido anti-horário. Resp. $-1/6$.

(c) $\oint_\gamma (y + e^{\sqrt{x}})\, dx + (2x + \cos y^2)\, dy$, onde γ é a fronteira da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ percorrida no sentido anti-horário. Resp. $1/3$.

(d) $\oint_\gamma x^2\, dx + y^2\, dy$, γ é a curva $x^6 + y^6 = 1$, orientada no sentido anti-horário. Resp. 0.

(e) $\oint_\gamma xy\, dx + 2x^2\, dy$, γ consiste do segmento de reta unindo $(-2,0)$ a $(2,0)$ e da semi-circunferência $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, orientada no sentido horário. Resp. 0.

(f) $\oint_\gamma 2xy\, dx + x^2\, dy$, γ é a cardióide $\rho = 1 + \cos\theta$ orientada no sentido anti-horário. Resp. 0.

(g) $\oint_\gamma (xy + e^{x^2})\, dx + (x^2 - \ln(1+y))\, dy$, γ consiste do segmento de reta de $(0,0)$ a $(\pi,0)$ e do arco da curva $y = \operatorname{sen} x$, orientada horário. Resp. $-\pi$.

(h) $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y) = (y^2 - x^2 y)\vec{i} + xy^2\vec{j}$ e γ consiste do arco de circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de $(2,0)$ a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, e dos segmentos de reta de $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(0,0)$ e de $(0,0)$ a $(2,0)$. Resp. $\pi + \frac{16}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$.

15. Calcule

(a) $\int_\gamma (-2xy + x^2) dx + \sqrt{8 - y^7}\, dy$, onde γ é o gráfico de $y = \cos x$, no intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, percorrido no sentido de x crescente. Resp. $\frac{\pi^3}{12}$.

(b) $\int_\gamma \left(\frac{2xy^2}{x^2+1}\right) dx + (2y \ln(x^2+1)) dy$, onde γ é o arco da elipse $4x^2 + y^2 = 1$ do ponto $(0,1)$ ao ponto $(\frac{1}{2}, 0)$ percorrido no sentido anti-horário. Resp. 0.

(c) $\int_\gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + xy\right) dy$ onde γ é a fronteira da região no plano determinada pelas desigualdades $y \geq x - 1$ e $y^2 \leq x + 1$, orientada no sentido anti-horário. Resp. $2\pi + \frac{9}{4}$.

(d) $\int_\gamma (2xy + \operatorname{sen}(y)) dx + x \cos(y) dy + x^2 dz$ onde γ é a intersecção das superfícies $3x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $y = x$, no 1^o octante e orientada de forma que a sua projeção no plano yz seja percorrida no sentido horário.

Resp. $\frac{1}{12}\left(6\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)$.

(e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y}{x^2+2y^2}dx+\frac{x}{x^2+2y^2}dy$ onde γ é a circunferência de centro $(0,1)$ e raio 3, percorrida no sentido horário. Resp. -2π.

16. *Área usando Teorema de Green*

(a) Seja D uma região limitada de $\mathbb{R}^2$ com D e ∂D satisfazendo as hipóteses do Teorema de Green. Mostre que a área de D é

$$\text{Área}(D)=\oint_{\partial D} x\,dy=\oint_{\partial D} -y\,dx.$$

(b) Usando (a) calcule a área de $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^{2/3}+y^{2/3}\le a^{2/3}\}$. $\frac{3}{8}a^6\pi$.

(c) Determine a área da região limitada pela hipociclóide dada por $\vec{r}(t)=\cos^3 t\,\vec{i}+\text{sen}^3\,t\,\vec{j}$, $0\le t\le 2\pi$. Resp. $\frac{3\pi}{8}$.

17. *Área de um polígono irregular.*

(a) Se γ é o segmento de reta ligando o ponto (x_1,y_1) ao ponto (x_2,y_2), mostre que

$$\int_\gamma x\,dy-y\,dx=x_1y_2-x_2y_1.$$

(b) No sentido anti-horário, os vértices de um polígono são (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_N,y_N). Mostre que sua área é dada por

$$A=\frac{1}{2}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+...+(x_{N-1}y_N-x_Ny_{N-1})+(x_Ny_1-x_1y_N)].$$

(c) Determine a área do pentágono de vértices $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(0,2)$ e $(-1,1)$. Resp. $\frac{9}{2}$.

18. Calcule

(a) $\displaystyle\int_\gamma x^2(5ydx+7xdy)+e^ydy$, sendo γ a elipse $16x^2+25y^2=100$, percorrida de $(0,-2)$ a $(0,2)$ com $x\ge 0$.

Resp. $e^2-\frac{1}{e^2}+\frac{125}{2}\pi$.

(b) $\displaystyle\int_\gamma (2xe^y-x^2y-\frac{y^3}{3})\,dx+(x^2e^y+\text{sen}\,y)\,dy$, sendo γ a circunferência $x^2+y^2-2x=0$, percorrida de $(0,0)$ a $(2,0)$ com $y\ge 0$. Resp. $4-\frac{3\pi}{4}$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \vec{v}.d\vec{r}$, sendo γ a fronteira do retângulo $[1,2]\times[-1,1]$ e $\vec{v}(x,y)=2\,\text{arctg}(\frac{y}{x})\,\vec{i}+(\ln(x^2+y^2)+2x)\,\vec{j}$, percorrida no sentido anti-horário. Resp. 4.

19. Calcule

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$, onde γ é a fronteira da região limitada pelas curvas $y^2=2(x+2)$ e $x=a$, com $a>0$, orientada no sentido horário. Resp. -2π.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$, onde γ é a curva $y=x^2+1$, $-1\le x\le 2$, percorrida do ponto $(-1,2)$ a $(2,5)$. Resp. $\frac{1}{2}\ln\frac{29}{5}$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y\,dx-(x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$, onde γ é a circunferência $x^2+y^2=4$, orientada no sentido horário. Resp. 2π.

(d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{x^2y\,dx-x^3\,dy}{(x^2+y^2)^2}$, onde γ é a fronteira da região $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\leq 1, |y|\leq 1\}$, orientada no sentido horário. Resp. π.

20. Determine todos os valores possíveis da integral

$$\int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$$

sobre uma curva simples lisa por partes que não passe pela origem.

21. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r}$ onde $\vec{F}=\left(\frac{-y}{x^2+\frac{y^2}{9}}+y, \frac{x}{x^2+\frac{y^2}{9}}+3x\right)$ se

(a) γ é a curva $(x-1)^2+(y-2)^2=4$, percorrida uma vez no sentido horário. Resp. -8π.

(b) γ é a curva $(x-1)^2+y^2=4$, percorrida uma vez no sentido horário. Resp. -14π.