1. Integral de linha de campos escalares

2. Campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

As definições abaixo serão dadas para campos no espaço. As definições no caso do plano são análogas.

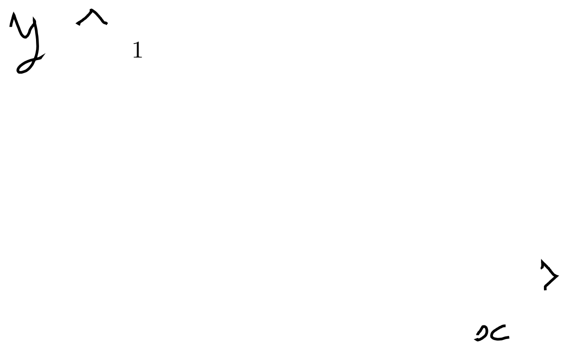
Definição 2.1. *Um campo vetorial no domínio $D \subset \mathbb{R}^3$, é uma função que associa cada ponto $P = (x, y, z) \in D$ um vetor $\vec{v}(P)$ de R^3 , com origem em P*

É conveniente considerar o vetor $\vec{v}(P)$ de R^3 "com origem em P".

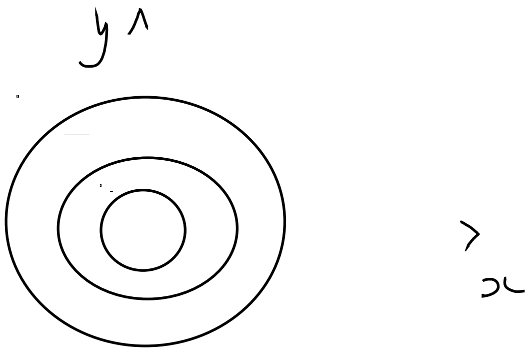
Escrevendo $\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, na base canônica de $\mathbb{R}^3$, as funções $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ e $R(x, y, z)$ são denominadas *funções coordenadas* ou, simplesmente *coordenadas* do campo $\vec{v}$. Frequentemente, escreveremos
$\vec{v}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ para denotar o campo vetorial $\vec{v}$.

Exemplo 2.2.
(1) $\vec{v}(x, y) = (x, y)$ *(vetor posição).*

Date: November 6, 2023.



(2) $\vec{v}(x,y) = (-y, x)$.



(3) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{j}$.

Diremos que o campo $\vec{F}$ é contínuo, de classe $\mathcal{C}^k$, etc, se suas funções coordenadas o forem.

Seja $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^1$ em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$.

Definição 2.3. *Definimos o campo escalar* ***divergente*** *de $\vec{F}$, em D, por*

$$div(\vec{F})(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z).$$

Definição 2.4. *Definimos o campo vetorial* ***rotacional*** *de $\vec{F}$, em D, por*

$$rot(\vec{F})(x,y,z) = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})(x,y,z)\vec{i} - (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})(x,y,z)\vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})(x,y,z)\vec{k}.$$

(Se $vecF(x,y) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j}$ for um campo no plano, definimos $rot(\vec{F})(x,y) = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})(x,y,z)\vec{k}$.)

Exemplo 2.5. *Calcular o divergente e o rotacional dos campos do exemplo 2.2.*

Definição 2.6. *Seja $F(x,y,z)$ um campo escalar (função) de classe $\mathcal{C}^1$ em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$. Definimos o campo vetorial* ***gradiente*** *de F em D, por*

$$\vec{\nabla}F(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\vec{k}.$$

Definindo o "vetor" $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, temos, simbolicamente:

$$rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F}.$$

e

$$div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}.$$

Proposição 2.7. *Se $\vec{F}(x,y,z)$ é um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^2$ em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ então $div(rot(\vec{F})) = 0$, em D.*

Se $F(x,y,z)$ é um campo escalar (função) de classe $\mathcal{C}^2$ em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ então $rot(\vec{\nabla}F) = 0$, em D.